

Sobre Imersão de Árvores em Grades

Vitor Tocci F. de Luca,^{id} Fabiano S. Oliveira,^{id}
Jayme L. Szwarcfiter^{id}

Resumo

Investigamos a imersão de árvores T com $\Delta(T) \leq 4$ em uma grade retangular, de modo que os vértices de T correspondam a pontos da grade, enquanto as arestas de T correspondem a segmentos retos sem interseção das retas que compõem a grade. Essas imersões são chamadas de modelos retilíneos. Um caminho de T é representado no modelo pela união dos segmentos retos correspondentes às suas arestas, que pode consistir em um caminho no modelo com várias dobras. O objetivo é determinar um modelo retilíneo de uma árvore, minimizando o número máximo de dobras dentre todos os caminhos de T neste modelo. Fornecemos um algoritmo de tempo quadrático para este problema. Também mostramos como construir modelos retilíneos que têm k como seu número mínimo de dobras e com o menor número de vértices possível. Como uma aplicação do nosso algoritmo, fornecemos um limite superior para o número de dobras de modelos EPG dos grafos $VPT \cap EPT$.

2000 AMS Subject Classification: 05C85, 05C05.

Keywords and Phrases: Imersões em grades, Número de dobras, Modelos EPG.

Este trabalho possui auxílio dos seguintes fomentos de pesquisa: CNPq, CAPES e FAPERJ.

1 Introdução

O problema de *imergir um grafo G em uma grade* é o de desenhar G em uma grade retangular bidimensional (chamada simplesmente de *grade*), de modo que cada vértice $v \in V(G)$ corresponda a um ponto da grade (uma interseção de uma reta horizontal e uma vertical da grade) e as arestas de G correspondem a caminhos da grade sem interseção. Por conveniência, permitiremos confundir o conceito de caminho no grafo com sua representação no modelo. A imersão de grafos em grade já foi considerada com diferentes perspectivas [1, 2, 5, 7, 8, 9]. Uma mudança de direção de um caminho em um ponto da grade é chamada de *dobra* e o ponto da grade no qual uma dobra ocorre é chamado de *ponto de dobra*. Em [1], os autores descreveram um algoritmo para imergir grafos planares e mostraram que a imersão resultante possui arestas com no máximo 6 dobras. Os mesmos autores posteriormente mostraram em [2] uma abordagem mais simples que fornece uma imersão na qual cada aresta possui no máximo 4 dobras. Imersões com arestas com no máximo 4 dobras também foram consideradas em [9], onde um algoritmo de tempo linear é apresentado. Em [7], algoritmos de tempo linear foram descritos para imergir grafos planares de forma que a imersão resultante tenha arestas com no máximo 2 dobras, com exceção do octaedro, para o qual no máximo duas arestas com 3 dobras podem ser produzidas. Nesse mesmo artigo, os autores também forneceram um limite superior para o número total de dobras de suas imersões. Note que todos esses resultados estão relacionados ao problema de encontrar imersões de grafos nos quais o objetivo é minimizar o número de dobras das arestas do grafo e/ou do total de dobras da imersão.

Neste artigo, introduzimos um problema similar: dado um grafo planar G , encontrar uma imersão de G na grade na qual as arestas de G correspondam a caminhos da grade dois a dois não intersectantes, isto é, não compartilham aresta da grade, cada um deles sem dobras, de modo que o número máximo de dobras, em todos os caminhos de G , é minimizado. Assim, este novo problema muda o foco do número de dobras das arestas

de G para o número de dobras dos caminhos de G . Este problema ainda não foi considerado na literatura. Por exemplo, a árvore na Figura 1(a) é desenhada de forma que há um caminho com 5 dobras (o caminho que une o e m) e 5 é o número máximo de dobras de um caminho nesse desenho. No entanto, podemos diminuir esse número máximo de dobras para 3, como ilustra a Figura 1(b). Na Seção 2, descrevemos um algoritmo de tempo quadrático que resolve o problema quando G é uma árvore.

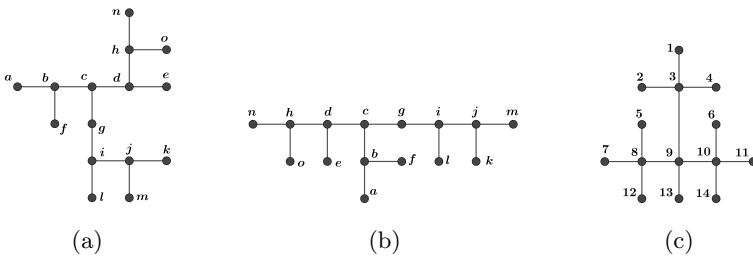


Figura 1: Dois possíveis modelos (a) \mathcal{M}_1 e (b) \mathcal{M}_2 da mesma árvore T . Não existe modelo da árvore (c) que empregue apenas uma aresta de grade para cada aresta do grafo.

Este problema será empregado na obtenção de um limite superior de dobras algorítmico em modelos EPG de grafos $VPT \cap EPT$. Definiremos essas classes a seguir, e a aplicação será discutida na Seção 3. Dada uma árvore T , chamada *árvore hospedeira*, e um conjunto \mathcal{P} de caminhos em T , o *grafo de interseção por vértices (resp. arestas) de caminhos em uma árvore* de \mathcal{P} é o grafo denotado por $VPT(\mathcal{P})$ (resp. $EPT(\mathcal{P})$) tendo \mathcal{P} como conjunto de vértices e dois vértices são adjacentes se os caminhos correspondentes têm em comum pelo menos um vértice (resp. aresta). Dizemos que $\langle T, \mathcal{P} \rangle$ é um *modelo VPT (resp. EPT)* de G (veja [6]).

Em vez de árvores hospedeiras, os grafos de interesse têm uma grade \mathcal{G} como a estrutura subjacente da qual uma família de caminhos \mathcal{P} é considerada. Um grafo G é um *grafo de interseção por arestas de caminhos de uma grade* se há uma coleção de caminhos \mathcal{P} em uma grade \mathcal{G} tal que cada vértice em G corresponda a um membro de \mathcal{P} e dois vértices são

adjacentes se, e somente se, os caminhos correspondentes compartilham uma ou mais arestas de \mathcal{G} . Dizemos que \mathcal{P} é um *modelo EPG* de G . Um modelo EPG é um *modelo B_k -EPG* se cada caminho tiver no máximo k dobras. Um grafo que admite um modelo B_k -EPG é denominado B_k -EPG.

Sejam G um grafo e $v \in V(G)$. Denotamos o grau de v por $d(v)$ e o grau máximo de G por $\Delta(G)$.

Na Seção 2, discutimos o conceito de modelo retilíneo de árvores. É apresentado um algoritmo que determina um tal modelo no qual o número máximo de dobras em todos os caminhos de uma árvore é minimizado. Na Seção 3, empregamos tal algoritmo para obter modelos retilíneos de árvores hospedeiras que são usados para construir modelos EPG de grafos $VPT \cap EPT$. Um limite superior algorítmico para o número de dobras dos modelos EPG de grafos $VPT \cap EPT$ é encontrado.

2 Imergindo árvores em grades

Considere o problema de imergir uma tal árvore em uma grade \mathcal{G} , de modo que os vértices devam ser associados a pontos da grade e as arestas desenhadas como caminhos sem dobras não-intersectantes, isto é, não compartilham aresta de \mathcal{G} , o que chamaremos de um *modelo retilíneo* de T , ou simplesmente um *s-modelo* (do inglês “straight”) de T . Naturalmente, devemos assumir $\Delta(T) \leq 4$. A Figura 1 ilustra dois possíveis s-modelos de uma mesma árvore. Dado um caminho $Q = v_1, v_2, \dots, v_k$ de T , e um s-modelo \mathcal{M} de T , o número de dobras de Q é definido como sendo o número de dobras do caminho da grade que consiste da concatenação dos caminhos (retos) da grade correspondentes às arestas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ em \mathcal{M} . Na Figura 1(a), o caminho o, h, d, c, g, i, j, m tem 5 dobras, enquanto que o mesmo caminho na Figura 1(b) tem apenas 1 dobra.

Dentre todos os s-modelos possíveis, considere o problema de encontrar aquele em que o número máximo de dobras de um caminho de T é mínimo. Note que, como todo caminho de uma árvore está contido em um caminho folha a folha, dentre os caminhos que mais dobram em um dado s-modelo

está um caminho folha a folha, e portanto apenas estes serão considerados. Mais formalmente, sejam $\mathcal{M}^*(T)$ o conjunto de todos os s-modelos de uma dada árvore T e $u, v \in V(T)$ folhas de T . O número de dobras do caminho que conecta u e v em um s-modelo $\mathcal{M} \in \mathcal{M}^*(T)$ é denotado por $b_{\mathcal{M}}(u, v)$. Portanto, $b_{\mathcal{M}_1}(o, m) = 5$ e $b_{\mathcal{M}_2}(o, m) = 1$. Seja

$$b(\mathcal{M}) = \max\{b_{\mathcal{M}}(u, v) \mid u \text{ e } v \text{ são folhas em } T\}$$

o número de dobras do caminho que mais dobra em \mathcal{M} , e

$$b(T) = \min\{b(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \in \mathcal{M}^*(T)\}$$

o número mínimo de dobras de um s-modelo, dentre todos os s-modelos. A Figura 1(a) mostra um s-modelo \mathcal{M}_1 de uma árvore T tal que $b(\mathcal{M}_1) = 5$, e portanto $b(T) \leq 5$. A Figura 1(b) mostra um outro s-modelo \mathcal{M}_2 de T para o qual $b(\mathcal{M}_2) = 3$ e, portanto, $b(T) \leq 3$. É possível mostrar que nenhum s-modelo \mathcal{M} de T possui $b(\mathcal{M}) = 2$ e, assim, $b(T) = 3$.

Nós fornecemos um algoritmo que determina $b(T)$ e encontra um s-modelo \mathcal{M} para o qual $b(\mathcal{M}) = b(T)$. Antes de descrever o algoritmo, um pouco mais de terminologia é necessária.

Dado $\mathcal{M} \in \mathcal{M}^*(T)$, seja $b_{\mathcal{M}}^{\ell}(p, v)$ o número máximo de dobras em um caminho que tem como extremidades p e uma folha de T , dentre todos os caminhos que contém $v \in V(T)$. Isto é,

$$b_{\mathcal{M}}^{\ell}(p, v) = \max\{b_{\mathcal{M}}(p, f) \mid f \text{ é folha de } T \text{ e o caminho conectando } p \text{ e } f \text{ contém } v\}.$$

Definimos também,

$$b_T^{\ell}(p, v) = \min\{b_{\mathcal{M}}^{\ell}(p, v) \mid \mathcal{M} \in \mathcal{M}^*(T)\}.$$

Sejam $\mathcal{M} \in \mathcal{M}^*(T)$, $v \in V(T)$. Sejam $u_{\mathcal{M}}^1(v), \dots, u_{\mathcal{M}}^{d(v)}(v)$ os vizinhos de v e $b_{\mathcal{M}}^i(v) = b_{\mathcal{M}}^{\ell}(v, u_{\mathcal{M}}^i(v))$. Para $d(v) < i \leq 4$, definimos vizinhos “virtuais” $u_{\mathcal{M}}^i(v) = \lambda$ para os quais $b_{\mathcal{M}}^i(v) = -1$. Assuma que os vizinhos (reais e virtuais) estão ordenados de modo que $b_{\mathcal{M}}^i(v) \geq b_{\mathcal{M}}^{i+1}(v)$ para todo $1 \leq i < 4$. Como exemplos, $u_{\mathcal{M}_2}^1(i) = g$ (e $b_{\mathcal{M}_2}^1(i) = 2$), $u_{\mathcal{M}_2}^2(i) = j$ (e $b_{\mathcal{M}_2}^2(i) = 1$), $u_{\mathcal{M}_2}^3(i) = l$ (e $b_{\mathcal{M}_2}^3(i) = 0$), e $u_{\mathcal{M}_2}^4(i) = \lambda$ (e $b_{\mathcal{M}_2}^4(i) = -1$).

Sejam $v \in V(T)$ e $\mathcal{M} \in \mathcal{M}^*(T)$. Dizemos que v está *balanceado* se $u_{\mathcal{M}}^1(v)$ e $u_{\mathcal{M}}^2(v)$ estiverem na mesma reta horizontal ou vertical da grade em \mathcal{M} (e, portanto, $u_{\mathcal{M}}^3(v)$ e $u_{\mathcal{M}}^4(v)$ também estarão).

O algoritmo consiste dos seguintes passos. Primeiro, seja v_1, v_2, \dots, v_{n-1} uma sequência de $V(T)$ tal que cada novo vértice v_i é adjacente a exatamente um vértice p_i para todo $1 \leq i < n$, onde $p_i = v_j$ para algum $0 \leq j < i$. Seja \mathcal{M} um modelo contendo um único vértice v_0 em algum ponto da grade. Para $i = 1, 2, \dots, n-1$, adicione a \mathcal{M} o vértice v_i conectando-o ao ponto da grade de p_i , em qualquer reta horizontal ou vertical da grade, em que estiver p_i . Então, chama-se o procedimento de balancear v_i . Tal procedimento consiste em atravessar T , enraizada em v_i , em pós-ordem. A operação a ser realizada em cada vértice visitado é balancear v , rearrumando em \mathcal{M} o desenho das quatro subárvores de v enraizadas em $u_{\mathcal{M}}^i(v)$ (para $1 \leq i \leq 4$), potencialmente rotacionando-as e redimensionando-as para que fiquem ajustadas. Em relação à complexidade de tempo do algoritmo, é possível manter os valores de $u_{\mathcal{M}}^i(v)$ armazenados para cada $v \in V(T)$ e $1 \leq i \leq 4$, e atualizá-los em tempo constante logo após a etapa de balanceamento, com base em quais subárvores tiveram suas posições trocadas e nos respectivos valores de $u_{\mathcal{M}}^i(w)$ dos vizinhos $w \in N(v)$. Como o algoritmo realiza $n-1$ percursos em pós-ordem em T , o algoritmo é executado em tempo $O(n^2)$.

Teorema 2.1. *Dada uma árvore T , seja \mathcal{M} o s-modelo produzido pela execução do algoritmo tendo T como entrada. Então, $b(\mathcal{M}) = b(T)$.*

Agora, voltamos nossa atenção para algumas outras propriedades em relação ao número de dobras das árvores.

Sejam $r \in V(T)$ tal que $d(r) = 2$, e $\mathcal{M} \in \mathcal{M}^*(T)$ um s-modelo balanceado de T . Sejam r_1 e r_2 os vizinhos de r em T . Definimos T_0^f como a árvore que possui um único vértice e, para todo $k \geq 1$, T_k^f é a árvore enraizada em r tal que $b_{\mathcal{M}}^\ell(r, r_1) = b_{\mathcal{M}}^\ell(r, r_2) = k-1$ e o número de vértices

de T é o menor possível. Ou seja,

$$T_k^f = \underset{T \text{ é árvore}}{\operatorname{argmin}} \{ |V(T)| \mid r \in V(T), N(r) = \{r_1, r_2\}, \mathcal{M} \in \mathcal{M}^*(T),$$

$$\mathcal{M} \text{ está balanceado, } b_{\mathcal{M}}^{\ell}(r, r_1) = b_{\mathcal{M}}^{\ell}(r, r_2) = k - 1 \}.$$

Considere o problema de encontrar uma árvore T com k dobras tal que $|V(T)|$ é mínimo. Seja T_k uma árvore com k dobras definida a seguir:

- Para $k = 0$, T_k é uma árvore contendo um único vértice.
- Para $k \geq 1$, considere o caminho $P = v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ com k dobras. Portanto, em cada v_i ocorre uma dobra de P , para todo $1 \leq i \leq k$. Definimos T_k a partir de P da seguinte forma: para cada v_i , adicione a P uma cópia disjunta da árvore $T_{d_i}^f$, onde $d_i = \min\{i - 1, k - i\}$, e adicione a aresta (v_i, r) , onde r é a raiz de $T_{d_i}^f$.

Teorema 2.2. *Seja T uma árvore tal que $b(T) = k$. Então, $|V(T)| \geq |V(T_k)|$.*

Teorema 2.3. *Se T é árvore com n vértices, então $b(T) \leq 2 \log_2(n+2) - 4$.*

3 Modelos EPG de grafos $VPT \cap EPT$

Nesta seção, fornecemos um limite superior algorítmico para o número de dobras de um modelo EPG de grafos $VPT \cap EPT$. Os grafos $VPT \cap EPT$ são aqueles que podem ser representados em árvores hospedeiras com grau máximo limitado a 3 [6]. Em [3], esta classe é caracterizada por uma família de subgrafos induzidos proibidos minimais. Em [4], os autores mostraram que todo grafo cordal B_1 -EPG é um grafo $VPT \cap EPT$.

Seja G um grafo $VPT \cap EPT$ e $\langle T, \mathcal{P} \rangle$ um modelo VPT de G no qual $\Delta(T) \leq 3$. Considere $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V(T) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ e $\mathcal{P} = \{Q_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Construa um modelo EPG $\mathcal{R} = \{P_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de G em uma grade \mathcal{G} da seguinte forma.

Primeiramente, seja \mathcal{M} um modelo de T com o número mínimo de dobras na grade \mathcal{G} , como descrito na Seção 2. Para toda aresta $e_i \in E(T)$

em \mathcal{M} , seja e'_i o ponto médio do segmento de reta correspondente a e_i . Para todo $u_i \in V(T)$ tal que $d(u_i) = 1$, construa um caminho auxiliar, P'_{u_i} , que vai de u_i a e' , onde e é a aresta à qual u_i é incidente. Para todo $u_i \in V(T)$ tal que $d(u_i) = 2$, sejam e_1 e e_2 as arestas incidentes a u_i . Construa um caminho auxiliar P'_{u_i} que tem e'_1 e e'_2 como extremidades. Para todo $u_i \in V(T)$ tal que $d(u_i) = 3$, sejam e_1 , e_2 e e_3 as arestas incidentes a u_i . Note que, no mínimo uma delas é vertical e no mínimo uma delas é horizontal. Sem perda de generalidade, suponha que e_1 é vertical e e_2 é horizontal. Construa um caminho auxiliar P'_{u_i} que tem e'_1 e e'_2 como extremidades. Para todo $Q_i \in \mathcal{P}$, seja u_i uma extremidade de Q_i . Inicialize P_i como sendo coincidente a Q_i . Considere os seguintes casos:

- Se $d(u_i) = 2$, aumente P_i esticando sua extremidade para que ela coincida com a extremidade de P'_{u_i} que ainda não pertence a P_i .
- Se $d(u_i) = 3$ e $P_i \cap P'_{u_i} = \{u_i\}$, aumente P_i para que sua extremidade coincida com a extremidade de P'_{u_i} que não impõe nova dobra a P_i .
- Se $d(u_i) = 3$ e $P_i \cap P'_{u_i} \neq \{u_i\}$, isto implica que u_i é uma extremidade de P_i e P_i já contém uma das extremidades de P'_{u_i} . Neste caso, aumente P_i esticando sua extremidade para que ela coincida com a outra extremidade de P'_{u_i} .

Remova os caminhos P'_{u_i} para todo $1 \leq i \leq m$. Nós chamaremos tal construção uma *transformação VPT-EPG*. Uma propriedade importante é que ela gera um modelo B_k -EPG de G com $k \leq b(T)$. De fato, note que se um caminho Q_i que tem u_i como uma extremidade possui $b(T)$ dobras, então $d(u_i) \leq 2$. Portanto, ou $P_i = Q_i$ ou P_i é Q_i com as extremidades esticadas sem qualquer nova dobra. Assim, P_i tem $b(T)$ dobras e, portanto, \mathcal{R} tem um máximo de $b(T)$ dobras em qualquer um de seus caminhos. A Figura 2(b) apresenta um modelo EPG $\mathcal{R} = \{P_i \mid 1 \leq i \leq 10\}$ derivado a partir da família $\mathcal{P} = \{Q_i \mid 1 \leq i \leq 10\}$ da Figura 2(a).

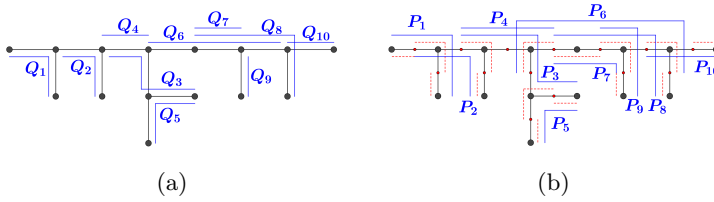


Figura 2: Construção de um modelo B_k -EPG com $k \leq b(T)$.

Referências

- [1] Aggarwal, A., M. Klawe, D. Lichtentein, N. Linial e A. Wigderson, *Multi-layer grid embeddings*, in: *26th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1985)*, IEEE, (1985), 186–196.
- [2] Aggarwal, A., M. Klawe e P. Shor, *Multilayer grid embeddings for VLSI*, *Algorithmica* **6** (1991), 129–151.
- [3] Alcón, L., M. Gutierrez e M. P. Mazzoleni, *Characterizing paths graphs on bounded degree trees by minimal forbidden induced subgraphs*, *Discrete Mathematics* **338** (2015), 103–110.
- [4] Alcón, L., M. P. Mazzoleni e T. D. d. Santos, *On B_1 -EPG and EPT graphs*, arXiv preprint 2007.02755 (2020).
- [5] Beck, M. e S. Storandt, *Puzzling grid embeddings*, in: *2020 Proceedings of the Twenty-Second Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX)*, SIAM (2020), 94–105.
- [6] Golumbic, M. C. e R. E. Jamison, *Edge and vertex intersection of paths in a tree*, *Discrete Mathematics* **55** (1985), 151–159.
- [7] Liu, Y., A. Morgana e B. Simeone, *A linear algorithm for 2-bend embeddings of planar graphs in the two-dimensional grid*, *Discrete Applied Mathematics* **81** (1998), 69–91.

- [8] Schnyder, W., *Embedding planar graphs on the grid*, in: *Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, (1990), 138–148.
- [9] Tamassia, R. e I. G. Tollis, *Planar grid embedding in linear time*, *IEEE Transactions on circuits and systems* **36** (1989), 1230–1234.

Vitor Tocci Ferreira de Luca
Rio de Janeiro, Brasil
IME - UERJ
toccivitor8@gmail.com

Fabiano de Souza Oliveira
Rio de Janeiro, Brasil
IME - UERJ
fabiano.oliveira@ime.uerj.br

Jayme Luiz Szwarcfiter
Rio de Janeiro, Brasil
IME - UERJ
jayme@nce.ufrj.br