

## HOMOLOGIE D'INTERSECTION

Jean-Paul Brasselet 

La *dualité de Poincaré* est considérée comme l'un des résultats les plus importants de la topologie algébrique. On peut expliciter cette dualité en disant que, pour une variété lisse, compacte et orientée, le morphisme d'intersection des cycles définit une application bilinéaire non dégénérée. Nous verrons que ce résultat n'est pas valable pour les pseudovariétés (variétés singulières) dans la théorie classique de l'homologie, nous pouvons cependant le retrouver dans ce cas grâce à la théorie d'homologie d'intersection.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Maria Aparecida Soares Ruas, pour l'invitation et l'organisation du colloque, lequel a été une parfaite réussite.

### 1. Pseudovariétés

**Définition.** Etant donné un complexe simplicial  $K$ , on dit que l'espace topologique  $X = |K|$  est une  *$n$ -pseudovariété* si :

- (i)  $|K|$  est la réunion des  $n$ -simplexes,
- (ii) tout  $n - 1$ -simplexe de  $K$  est face d'exactly deux  $n$ -simplexes,
- (iii) pour tout couple de  $n$ -simplexes  $\sigma$  et  $\sigma'$  de  $K$ , il existe une suite de  $n$ -simplexes

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k = \sigma'$$

telle que, pour tout  $i$ ,  $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$  est un  $n - 1$ -simplexe.

La définition est équivalente à l'existence d'un sous-complexe  $L$  de  $K$  tel que :

- (a) l'espace  $X = |K|$  est connexe,
- (b)  $\Sigma = |L|$  est un fermé de  $X$  dont la dimension, en ses points lisses est inférieure ou égale à  $n - 2$ ,

(c)  $X - \Sigma$  est une variété topologique de dimension  $n$ , dense dans  $X$ .

On dira que la pseudovariété  $X = |K|$  est orientée s'il existe des orientations compatibles de tous les  $n$ -simplexes. Dans ce cas, la somme des  $n$ -simplexes munis des orientations compatibles est un  $n$ -cycle. On note  $[X]$ , et on appelle *classe fondamentale* de  $X$ , la classe d'homologie de ce  $n$ -cycle. La classe fondamentale est un générateur de  $H_n(X; \mathbf{Z}) = H_n(K; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ .

Dans la suite,  $X = |K|$  désignera une  $n$ -pseudovariété topologique triangulée, compacte, connexe et orientée

### Subdivision barycentrique, blocs duaux.

Etant donné un complexe simplicial  $K$  de  $\mathbf{R}^n$ , pour tout simplexe  $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ , on appelle barycentre de  $\sigma$  le point

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p v_i.$$

A toute suite  $\sigma_{i_0} < \dots < \sigma_{i_k}$  de simplexes incidents de  $K$ , on associe un simplexe  $[\hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_k}]$ . On obtient ainsi un complexe simplicial qui est une subdivision de  $K$ , appelée première subdivision barycentrique de  $K$  et est notée  $K'$ . On remarque que les sommets de  $[\hat{\sigma}_{i_0}, \dots, \hat{\sigma}_{i_k}]$  sont naturellement ordonnés par les dimensions des  $\sigma_{i_j}$ . On définit de cette façon, sur les simplexes de la subdivision barycentrique  $K'$ , une orientation canonique, même si les simplexes de  $K$  ne sont pas orientés.

### Decomposition en blocs.

L'idée de Poincaré est d'associer, à une triangulation d'une variété  $X$  de dimension  $n$ , une décomposition de  $X$ , en "cellules", telle qu'il existe une correspondance entre simplexes de dimension  $p$  et cellules de dimension complémentaire  $n - p$ . Cette correspondance se fait de la façon suivante : pour tout simplexe  $\sigma$  de  $K$ , on considère tous les simplexes de  $K'$  dont le premier sommet est  $\hat{\sigma}$ , c'est-à-dire tous les simplexes de la forme  $(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}_{i_1}, \dots, \hat{\sigma}_{i_p})$  avec  $\sigma < \sigma_{i_1} < \dots < \sigma_{i_p}$ . On appelle bloc dual de  $\sigma$ , et on note  $D(\sigma)$ , la réunion de tous ces simplexes.

On a :

$$D(\sigma) = \{\tau \in K' : \tau \cap \sigma = \{\hat{\sigma}\}\}.$$

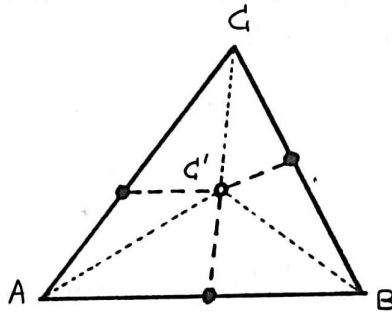


Figure 1 : Subdivision barycentrique du triangle

**Théorème.** Soit  $K$  un complexe simplicial fini, consistant en  $n$ -simplexes et leurs faces. Soit  $\sigma$  un  $p$ -simplexe de  $K$ ,

(a) les blocs duaux sont disjoints et leur réunion est  $|K|$ ,

(b)  $\overline{D}(\sigma)$  est un polyèdre d'un sous-complexe de  $K'$  de dimension  $n - p$ ,

(c) le bord de  $D(\sigma)$  est la réunion de tous les blocs  $D(\tau)$  tels que  $\tau$  admette  $\sigma$  comme face propre; ces blocs ont une dimension inférieure à  $n - p$ .

### Intersection des cycles.

Soit  $X$  une  $n$ -variété topologique compacte, connexe et orientée. En utilisant l'isomorphisme (de Poincaré) entre la cohomologie et l'homologie, on peut définir une structure d'anneau sur l'homologie de  $X$ , correspondante au cup-produit en cohomologie. Historiquement cette structure d'anneau a d'abord été définie comme produit d'intersection des cycles, avant la découverte de la cohomologie. Le produit d'intersection des cycles  $a \cdot b$  était défini comme l'intersection géométrique de ces cycles.

Soit  $L$  une triangulation de la variété topologique  $X$ , notons  $C_i(L)$  le groupe des  $i$ -chaînes simpliciales de  $L$  à coefficients entiers. Lefschetz a remarqué qu'un simplexe de  $L$  et une cellule de la décomposition cellulaire duale  $D(L)$  sont toujours en position générale, i.e. transverses. Leur intersection est une chaîne

de  $L'$ . On obtient ainsi un produit d'intersection, au niveau des chaînes de  $L$  et de  $D(L)$  (combinaisons linéaires de cellules duales) :

$$C_{n-p}(L) \times C_{n-q}(D(L)) \xrightarrow{\bullet} C_{n-(p+q)}(L')$$

Si  $K = L'$  est la première subdivision barycentrique de la triangulation  $L$  de  $X$ , ce produit s'écrit, avec des notations évidentes :

$$C_{n-p}^L(K) \times C_{n-q}^{D(L)}(K) \xrightarrow{\bullet} C_{n-(p+q)}(K).$$

D'autre part, le produit d'intersection satisfait la relation fondamentale du bord

$$\partial(a \cdot b) = a \cdot \partial(b) + (-1)^{n-p} \partial(a) \cdot b$$

d'où le théorème :

**Théorème.** (Lefschetz) *Sur une variété topologique, l'intersection de deux cycles transverses est un cycle.*

Ce résultat n'est pas valable pour une variété singulière, Poincaré en a donné un contre-exemple : la suspension du tore. La suspension d'une variété consiste à faire le produit de cette variété par le segment  $[-1, +1]$  et à "pincer" le cylindre obtenu aux niveaux  $-1$  et  $+1$ . La suspension du cercle  $S^1$  est homéomorphe à une sphère  $S^2$ . La suspension du tore est une variété singulière de dimension 3 admettant deux points singuliers isolés  $A$  et  $B$ . Nous en donnons une représentation dans la figure 2. Les suspensions des cycles  $a$  et  $b$  sont homéomorphes à  $S^2$ , ce sont des cycles de dimension 2 transverses. Leur intersection est la suspension du point d'intersection  $a \cap b$ , c'est donc un segment et non pas un cycle.

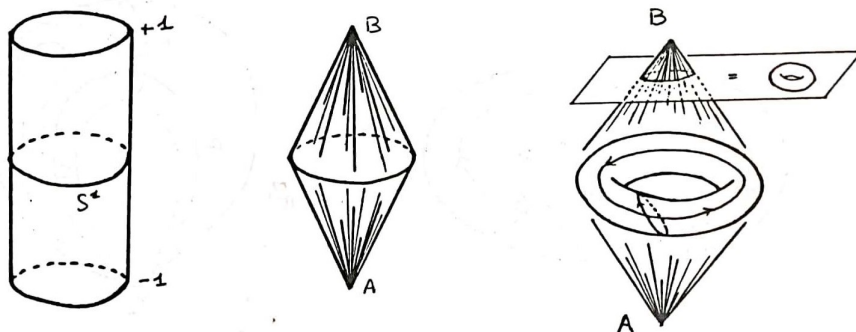


Figure 2 : Suspension de  $S^1$  et du tore. On remarque qu'un voisinage de  $A$  ou  $B$  dans la suspension du tore admet pour bord un tore et non pas une sphère.

Si la somme des dimensions de deux cycles transverses  $a$  et  $b$  est égale à celle de la variété, alors l'intersection de  $a$  et  $b$  est un nombre fini de points. En chacun de ces points on définit l'indice d'intersection en remarquant que, comme un cycle orienté est une combinaison linéaire de simplexes orientés, il suffit de définir l'indice pour deux simplexes élémentaires  $a$  et  $b$  transverses (dans  $K = L'$ ). En ce cas, l'indice d'intersection est  $+1$  si l'orientation de  $a$  suivie de l'orientation de  $b$  donne l'orientation de la variété, et est  $-1$  dans le cas contraire. On étend alors la définition par linéarité.

On appelle indice d'intersection de deux cycles  $a$  et  $b$  transverses et de dimensions complémentaires et on note  $I(a, b)$  la somme des indices d'intersection pour tous les points d'intersection de  $a$  et  $b$ .

Le produit d'intersection définit une application

$$C_i(K) \times C_{n-i}(K) \rightarrow \mathbf{Z}$$

qui associe à tout couple  $(a, b)$  de cycles transverses et de dimensions complémentaires, l'indice d'intersection  $I(a, b)$ .



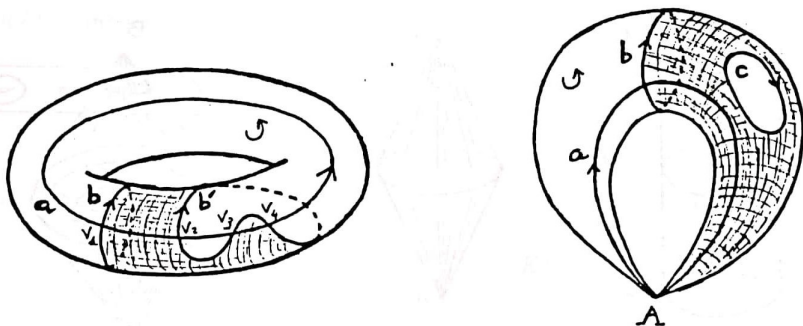


Figure 3 : Cycles sur le tore et le tore pincé.

Par exemple, dans la figure 3, et sur le tore, l'indice d'intersection, en  $v_1$ , des cycles  $a$  et  $b$  est  $+1$ ; donc  $I(a, b) = 1$ . L'indice d'intersection en  $v_2$  et  $v_4$  des cycles  $a$  et  $b'$  est  $+1$ , en  $v_3$  il vaut  $-1$ ; donc  $I(a, b') = 1$ . Dans cet exemple, les cycles  $b$  et  $b'$  sont homologues et on a  $I(a, b) = I(a, b') = +1$ . Cette propriété est une propriété générale pour les variétés topologiques. On a :

**Théorème.** *Pour une variété topologique orientée, l'indice d'intersection  $I(a, b)$  de deux cycles transverses et de dimensions complémentaires ne dépend pas des représentants choisis dans les classes d'homologie de  $a$  et  $b$ .*

La dualité de Poincaré exprime le fait que, pour les classes d'homologie à coefficients rationnels, l'application précédente définit une application bilinéaire non dégénérée.

$$H_i(X; \mathbb{Q}) \times H_{n-i}(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_0(X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q}$$

où  $\varepsilon$  est l'application d'évaluation.

Dans le tore pincé cette propriété n'est pas valable. Par exemple, dans la figure 3,  $b$  et  $c$  sont homologues, mais :  $I(a, b) = +1$  et  $I(a, c) = 0$ . Nous ne pouvons donc pas définir une intersection des cycles ni une structure d'anneau sur l'homologie, en utilisant l'homologie ordinaire.

## 2. Homologie d'intersection.

### Stratifications.

Dans la suite,  $X$  désigne une pseudovariété orientée de dimension  $n$ . Une stratification de  $X$  est donnée par une filtration

$$X = X_n \supset X_{n-1} = X_{n-2} \supset \cdots \supset X_1 \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

telle que :

(i) chaque strate  $S_i = X_i - X_{i-1}$  est vide ou est une réunion finie de variétés topologiques de dimension  $i$ ,

(ii) tout point  $x$  de  $X_i - X_{i-1}$ , admet un *voisinage distingué*  $U_x \subset X$  homéomorphe à  $B^i \times \mathring{c}(L_x)$  où :

\*  $B^i$  est une boule ouverte de  $\mathbf{R}^i$ ,

\* le "link"  $L_x$  est une pseudovariété compacte, de dimension  $n - i - 1$  indépendante du point  $x$  de la strate  $X_i - X_{i-1}$ . Il est filtré par :

$$L_x = L_{n-i-1} \supset L_{n-i-3} \supset \cdots \supset L_0 \supset L_{-1} = \emptyset,$$

\*  $\mathring{c}$  désigne le cône ouvert (moins la base). Par définition, on a  $\mathring{c}(\emptyset) = \{\text{point}\}$ ,

d'autre part, l'homéomorphisme précédent préserve les stratifications, ce qui signifie qu'il envoie homéomorphiquement  $U_x \cap X_j$  sur  $B^i \times \mathring{c}(L_{j-i-1})$ , pour  $j \geq i$ .

L'élément  $X_{n-2}$  de la filtration est l'ensemble singulier  $\Sigma$  de  $X$ .

### Homologie d'intersection.

Rappelons que le support  $|\xi|$  d'une chaîne  $\xi$  de  $C_i(X)$  est la réunion des adhérences des  $i$ -simplexes  $\sigma$  pour lesquels le coefficient de  $\xi$  est non nul.

L'idée de l'homologie d'intersection, découverte par Goresky et MacPherson, est de récupérer les propriétés de l'intersection des cycles et de la dualité de Poincaré, y compris pour les variétés avec singularités. Pour cela, on ne considère que les cycles qui rencontrent la partie singulière avec une dimension "pas trop grande". Cette expression a un sens si l'on se donne une stratification de la variété, satisfaisant la condition de trivialité locale. Les chaînes (et

cycles) permis sont ceux qui rencontrent chaque strate de la partie singulière avec un défaut de transversalité contrôlé et fixé. Le défaut de transversalité est une fonction à valeurs entières et croissante avec la codimension des strates, on l'appelle *perversité* (*perversity* en anglais, et ... *Toleranz* en allemand).

**Définition.** Une *perversité* est une fonction entière  $p_\alpha$ , telle que,  $p_0 = p_1 = p_2 = 0$  et  $p_\alpha \leq p_{\alpha+1} \leq p_\alpha + 1$  pour  $\alpha \geq 2$ .

**Exemples** La *perversité nulle* :  $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ , la *perversité maximale* ou *totale*

$\bar{i} = (0, 0, 0, 1, 2, \dots, n-2)$ , et, pour  $n$  pair, les *perversités "moitié"* égales à :  $\bar{n} = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1)$  et  $\bar{m} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1)$ .

**Définition.** Une  $i$ -chaîne  $\xi$  de  $C_i(X)$  est  $\bar{p}$ -permise si :

$$\dim(|\xi| \cap X_{n-\alpha}) \leq i - \alpha + p_\alpha$$

On remarque que, si  $\xi$  est transverse à  $X_{n-\alpha}$ , on a  $\dim(|\xi| \cap X_{n-\alpha}) = i - \alpha$ , donc la condition précédente signifie que le défaut permis de transversalité est au maximum égal à la *perversité*.

**Définition.** Le groupe des chaînes d'intersection  $IC_i^{\bar{p}}(K)$  est le sous-espace de  $C_i(K)$  constitué des chaînes telles que  $\xi$  et  $\partial\xi$  sont  $\bar{p}$ -permises, en d'autres mots, pour tout  $\alpha \geq 2$  :

$$\dim(|\xi| \cap X_{n-\alpha}) \leq i - \alpha + p_\alpha$$

$$\dim(|\partial\xi| \cap X_{n-\alpha}) \leq (i-1) - \alpha + p_\alpha$$

Par exemple, une variété singulière de dimension  $n$ , admettant des points singuliers isolés, est naturellement stratifiée en deux strates : une strate (non connexe) de dimension 0 constituée des points singuliers, et le reste. Les chaînes et les cycles contenant les points singuliers sont permis seulement s'ils ont une dimension au moins égale à  $n - p_n$ .

Ainsi, dans le cas du tore pincé,  $n = 2$ , et il n'y a qu'une *perversité* avec  $p_2 = 0$ . Les cycles permis et passant par le point singulier ont une dimension plus grande que 2. Le cycle  $b$  est permis (voir figure 4), il est bord de la chaîne permise "cône sur  $b$ ". C'est aussi un bord permis. Le cycle  $a$  n'est pas un cycle permis.



Dans le cas où  $X$  est la suspension du tore,  $n = 3$  et on a deux perversités possibles, l'une  $\bar{p} = \bar{0}$  avec  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$  et l'autre  $\bar{q} = \bar{1}$  avec  $q_1 = q_2 = 0$  et  $q_3 = 1$ . Les suspensions  $\Sigma(a)$  et  $\Sigma(b)$  des cycles  $a$  et  $b$  du tore sont des cycles de dimension 2 de  $X$  permis pour la perversité  $\bar{q}$  mais ne sont pas permis pour la perversité  $\bar{p}$ . Les cycles  $a$  et  $b$  sont des cycles de dimension 1 de  $X$  permis pour les deux perversités, ce sont des bords permis (ils sont bords des cônes sur eux-mêmes) pour  $\bar{q}$ , mais non pour  $\bar{p}$ . Le tore  $T$  (au niveau 0 de la suspension) est un cycle de dimension 2 permis et un bord permis pour les deux perversités, c'est le bord du cône sur  $T$ .

Les groupes d'homologie d'intersection de  $X$  sont les groupes d'homologie du complexe  $IC_*^{\bar{p}}(X)$ . Par exemple, en dimension 1, l'homologie d'intersection du tore pincé est nulle, alors que son homologie ne l'est pas (voir les calculs ci-dessous).

**Remarque.** Les groupes d'homologie d'intersection sont indépendants de la triangulation et de la stratification de l'espace  $X$ .

### Produit d'intersection

**Propriété.** Si  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  et  $\bar{r}$  sont des perversités telles que  $\bar{p} + \bar{q} \leq \bar{r}$ , on a des accouplements bilinéaires

$$IH_i^{\bar{p}}(X) \times IH_j^{\bar{q}}(X) \rightarrow IH_{i+j-n}^{\bar{r}}(X)$$

On dit que deux perversités  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  sont complémentaires si pour tout  $\alpha$  on a  $\bar{p}_\alpha + \bar{q}_\alpha = \alpha - 2$ , autrement dit  $\bar{p} + \bar{q} = \bar{1}$ .

On obtient alors la dualité de Poincaré généralisée [GM] :

**Théorème.** Soit  $X$  une pseudovariété topologique, stratifiée, compacte, orientée et  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  deux perversités complémentaires, alors l'accouplement

$$IH_i^{\bar{p}}(X) \times IH_{n-i}^{\bar{q}}(X) \rightarrow IH_0^{\bar{1}}(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}$$

suivi du morphisme d'évaluation  $\varepsilon$  (qui compte les points avec leur ordre de multiplicité), est non dégénéré, lorsque tensorisé par  $\mathbf{Q}$ .

**Cas des singularités isolées.**

Soit  $X$  une pseudovariété topologique de dimension  $n$  admettant une singularité isolée en  $\{x\}$ . Pour toute perversité, seul intervient l'entier  $p_n$ ,  $0 \leq p_n \leq n - 2$  et on a :

$$IH_i^{\bar{p}}(X) = \begin{cases} H_i(X - \{x\}) & i < n - p_n - 1 \\ \text{Im}(H_i(X - \{x\}) \rightarrow H_i(X)) & i = n - p_n - 1 \\ H_i(X) & i > n - p_n - 1. \end{cases}$$

Dans le cas de la perversité moitié,  $n - p_n - 1 = [n/2]$ .

### Exemple du tore pincé.

Soit  $X$  le tore pincé

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{P}_2 \mid x^3 + y^3 = xyz\},$$

et  $a$  et  $b$  les cycles tels que  $a$  passe par le point singulier  $A$ .

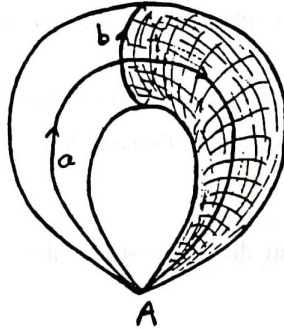


Figure 4 : Dans le tore pincé, le cycle  $a$  n'est pas permis, le cycle  $b$  est permis et est un bord permis.

On a

$$H_0(X) = \mathbf{Z}, \quad H_1(X) = \mathbf{Z}_a, \quad H_2(X) = \mathbf{Z}$$

Par les résultats antérieurs, et pour la perversité  $\bar{0} = (0, 0, 0)$  (la seule que l'on a dans ce cas), on a

$$IH_0^{\bar{0}}(X) = H_0(X - \{x\}) = \mathbf{Z}$$

$$IH_1^{\bar{0}}(X) = \text{Im}(H_1(X - \{x\}) \rightarrow H_1(X)) = \text{Im}(\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_a) = 0$$

$$IH_2^{\bar{0}}(X) = H_2(X) = \mathbf{Z}.$$

Remarquons que  $a$ , générateur de  $H_1(X)$ , n'est pas un cycle  $\bar{0}$ -permis et que le cycle  $b$ , qui est  $\bar{0}$ -permis, est un bord  $\bar{0}$ -permis.

**Exemple de la suspension du tore.**

Dans le cas de la suspension du tore, les groupes  $IH_i^{\bar{p}}(X)$  et  $IH_i^{\bar{q}}(X)$  sont égaux à :

$i =$	0	1	2	3
$\bar{p} = \bar{0}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_a \oplus \mathbf{Z}_b$	0	$\mathbf{Z}$
$\bar{q} = \bar{t}$	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}_{\Sigma(a)} \oplus \mathbf{Z}_{\Sigma(b)}$	$\mathbf{Z}$

On vérifie facilement sur cet exemple la propriété de dualité de Poincaré : la matrice d'intersection  $IH_1^{\bar{0}}(X) \times IH_2^{\bar{t}}(X)$  :

$$\begin{matrix} & a & b \\ \Sigma(a) & \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Sigma(b) & \end{matrix}$$

où les signes dépendent des orientations choisies, a un déterminant non nul.

**Théorie de Morse stratifiée.**

La théorie de Morse stratifiée, due à M. Goresky et R. MacPherson (cf leur magnifique livre [GM 3] où le lecteur trouvera tous les détails) explique comment la théorie de Morse classique (sur les variétés lisses) s'étend au cas des variétés singulières admettant une stratification de Whitney. Tout d'abord, il s'agit de généraliser la notion de fonction de Morse :

**Définition.** Considérons un espace stratifié de Whitney  $X$  plongé dans une variété lisse  $M$ . Une fonction  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  est dite régulière si elle est restriction à  $X$  d'une fonction régulière sur  $M$ . Une fonction de Morse sur  $X$  est une fonction propre régulière  $f$  telle que :

- (0) Les valeurs critiques de  $f$  sont distinctes.
- (1) En tout point critique  $p$  de  $f$ , la restriction de  $f$  à la strate  $S$  contenant  $p$  est non dégénérée.

- (2) La différentielle de  $f$  en un point critique  $p$  n'annule aucune limite d'espaces tangents à une strate autre que celle contenant le point  $p$ .

Il suit de la définition que l'ensemble des points critiques est discret dans  $X$  et l'ensemble des valeurs critiques est discret dans  $\mathbf{R}$ . D'autre part, les conditions (0) et (1) impliquent que la restriction de  $f$  à chaque strate est une fonction de Morse dans le sens usuel.

M. Goresky et R. MacPherson montrent les résultats fondamentaux :

**Théorème.** ([GM 3]) *Le type topologique de  $X_{\leq c} = \{x \in X : f(x) \leq c\}$  reste constant lorsque  $c$  varie dans un intervalle ouvert ne contenant pas de valeur critique. La donnée de Morse mesurant le changement du type topologique de  $X_{\leq c}$  lorsque  $c$  traverse la valeur critique  $v$  correspondant au point critique  $p$  est le produit de la donnée de Morse de la restriction de  $f$  à la strate  $S$  contenant  $p$  (donnée de Morse tangente) par une "donnée de Morse normale" (voir [GM 3]). Cette dernière peut être vue comme donnée de Morse de la restriction de  $f$  à la "tranche normale" en  $p$  (cône sur le link de  $S$  au point  $p$ ).*

**Théorème.** ([GM 3]) *Soit  $X$  une variété analytique complexe (singulière) munie d'une stratification de Whitney et soit  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de Morse propre admettant un point critique en  $p \in X$  et de valeur critique  $v = f(p)$ . Notons  $\alpha$  la codimension complexe de la strate  $S$  contenant le point  $p$  et  $\lambda$  l'indice de Morse en  $p$  de la restriction  $f|_S$ . Alors, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, on a :*

$$IH_i^{\mathbb{R}}(X_{\leq v+\varepsilon}, X_{\leq v-\varepsilon}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq \alpha + \lambda \\ A_p & \text{pour } i = \alpha + \lambda \end{cases}$$

*Le groupe  $A_p$  est sans torsion, il ne dépend que de la composante connexe de la strate  $S$  contenant  $p$ , mais ne dépend pas de la fonction  $f$ . Cependant, contrairement au cas lisse, il n'est pas de rang 1.*

**Théorie de Lefschetz** ([GM 2] [GM 3] [FK 1] [FK 2]).

Comme les résultats précédents, les théorèmes connus sous le nom de théorèmes de Lefschetz et valables pour une sous-variété algébrique non-singulière fermée

d'un espace projectif complexe, ne sont plus valables pour les variétés singulières et dans le cadre de l'homologie ordinaire. La théorie d'homologie d'intersection permet de retrouver de tels résultats dans le cas des variétés singulières. Il en est

**Théorème de Lefschetz des sections hyperplanes.** ([GM 2]) *Soit  $X$  une sous-variété algébrique quasiprojective de dimension pure  $n$  d'un espace projectif complexe, soit  $H$  un hyperplan générique et  $\bar{p}$  une perversité  $\bar{p} \leq \bar{m} + 1$ . Alors le morphisme naturel*

$$IH_i^{\bar{p}}(X \cap H) \longrightarrow IH_i^{\bar{p}}(X)$$

*est un isomorphisme pour  $i \leq n - 2$  et est surjectif pour  $i = n - 1$ .*

**Théorème de Lefschetz "dur".** ([BBD]) *Soit  $X$  une sous-variété algébrique quasiprojective de dimension pure  $n$  d'un espace projectif complexe, et soit  $A$  une section hyperplane générique de  $X$ . Alors,*

$$IH_{n+k}^{\bar{m}}(X; \mathbf{Q}) \xrightarrow{\cap [A]^k} IH_{n-k}^{\bar{m}}(X; \mathbf{Q})$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels (sur  $\mathbf{Q}$ ).*

**Théorème.** ([GM 3]) *Soit  $X$  un espace de Stein complexe de dimension  $n$ . Alors,  $IH_i^{\bar{m}}(X; \mathbf{Z}) = 0$  pour  $i > n$  et  $IH_n^{\bar{m}}(X; \mathbf{Z})$  est sans torsion.*

## Bibliographie

- [BBD] A.A. Beilinson, J. Berntein et P. Deligne *Faisceaux pervers*, Asterisque 100 (1982).
- [Bo] A. Borel et al. *Intersection Cohomology*, Birkhäuser, 1984.
- [Br] J.P. Brasselet *Singularités en topologie*, dans Images des Mathématiques, Editions du CNRS, 1990.
- [FK 1] K.H. Fieseler et L. Kaup *Theorems of Lefschetz Type in Intersection Homology, I. The Hyperplane Section*. Theorem. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 33, 1988, 175 - 195.



- [FK 2] K.H. Fieseler et L. Kaup *On the hard Lefschetz Theorem in intersection homology for complex varieties with isolated singularities*. Aequ. Math. 34, 1987, 240 - 263.
- [GM 1] M. Goresky et R. MacPherson *Intersection Homology theory*, Topology 19, 1980, 135-162.
- [GM 2] M. Goresky et R. MacPherson *Intersection homology II*, Invent. Math. 71 (1983), 77-129.
- [GM 3] M. Goresky et R. MacPherson *Stratified Morse theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 Vol 14. Springer-Verlag. 1988.
- [L] S. Lefschetz *Topology*, AMS Colloquium Publications, Volume XII, 1930.
- [P 1] H. Poincaré *Analysis situs*, Journal de l'Ecole Polytechnique, t.1, p. 1-121, 1895. 100, (1974), 423 - 432.
- [P 2] H. Poincaré *Complément à l'Analysis situs*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t.13, p. 285-343, 1899.
- [P 3] H. Poincaré *Second complément à l'Analysis situs*, Proceedings of the London Mathematical Society, t.32, p. 277-308, 14 Juin 1900.

C.I.R.M.

Marseille - France