Matemática Contemporânea, Vol. 46, 239–247
http://doi.org/10.21711/231766362020/rmc4625

Algoritmos e Limites para Alguns Casos Polinomiais da Coloração Orientada

Mateus de Paula Ferreira **Hebert Coelho da Silva**

Resumo

Seja $\overrightarrow{G} = (V, A)$ um grafo orientado, $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{zt} \in A(\overrightarrow{G})$, e C um conjunto com k cores distintas. Uma função $\phi : V(\overrightarrow{G}) \to C$ tal que $\phi(x) \neq \phi(y)$ e se $\phi(x) = \phi(t)$ então $\phi(y) \neq \phi(z)$ é chamada de k-coloração orientada. O número cromático orientado $\chi_o(\overrightarrow{G})$ é o menor k tal que $\overrightarrow{G}$ admite uma k-coloração orientada. Neste trabalho demonstramos que um grafo $\overrightarrow{G}$ em que seu grafo subjacente contém um único ciclo de tamanho múltiplo de 3 pode ser colorido por um torneio que contém um único ciclo orientado e que um grafo orientado acíclico que não contém o caminho $\overrightarrow{P_{n+1}}$ como subgrafo pode ser colorido pelo torneio transitivo $\overrightarrow{T_n}$. Demonstramos que um grafo $\overrightarrow{G}$ tem $\chi_o(\overrightarrow{G}) \leq 3$ se e somente se todo vértice de $\overrightarrow{G}$ é um vértice fonte ou um vértice sumidouro ou todo ciclo de $\overrightarrow{G}$ tem tamanho múltiplo de 3 ou $\overrightarrow{G}$ é acíclico e não contém $\overrightarrow{P_4}$ como subgrafo.

2000 AMS Subject Classification: 05C15, 05C85 e 05C20.

Key Words and Phrases: Coloração Orientada, Número Cromático Orientado, Homomorfismo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, e pela FAPEG.

1 Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo, a *orientação* de uma aresta $e \in E(G)$ é a substituição de e por um arco. Um *grafo orientado* $\overrightarrow{G} = (V, A)$ é obtido de um grafo simples G pela orientação de cada aresta, dizemos que G é o grafo subjacente de $\overrightarrow{G}$. Um *torneio* T_n com n vértices é a orientação de cada aresta de um grafo completo K_n. Um torneio é *transitivo* ou *acíclico* se e somente se sempre que $\overrightarrow{uv}$ e $\overrightarrow{vw}$ são arcos, $\overrightarrow{uw}$ também é um arco.

Seja $x \in V(\overrightarrow{G})$, o conjunto das adjacências de x é definido por $\Gamma_{\overrightarrow{G}}(x) = \{y : \overrightarrow{xy} \in A(\overrightarrow{G}) \text{ ou } \overrightarrow{yx} \in A(\overrightarrow{G})\}$. O conjunto das adjacências também pode ser definido sobre um conjunto de vértices $U \subset V(\overrightarrow{G})$, onde $\Gamma_{\overrightarrow{G}}(U) = \bigcup_{x \in U} \Gamma_{\overrightarrow{G}}(x)$.

Sejam $\overrightarrow{G}$ e $\overrightarrow{H}$ dois grafos orientados. Um *homomorfismo* entre $\overrightarrow{G}$ e $\overrightarrow{H}$ é uma função $f : V(\overrightarrow{G}) \to V(\overrightarrow{H})$, onde se a aresta $\overrightarrow{xy} \in A(G)$ então $\overrightarrow{f(x)f(y)} \in A(\overrightarrow{H})$. O problema da *k-coloração orientada* foi introduzido na literatura por Raspaud e Sopena [5]. Uma k-coloração orientada de um grafo $\overrightarrow{G}$ é definida pela função $\phi_{\overrightarrow{G}}\colon V(\overrightarrow{G}) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que:

- Se $\overrightarrow{xy} \in A(\overrightarrow{G})$, então $\phi_{\overrightarrow{G}}(x) \neq \phi_{\overrightarrow{G}}(y)$.
- Se $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{zt} \in A(\overrightarrow{G})$ e $\phi_{\overrightarrow{G}}(x) = \phi_{\overrightarrow{G}}(t)$ então $\phi_{\overrightarrow{G}}(y) \neq \phi_{\overrightarrow{G}}(z)$.

O *número cromático orientado*, denotado por $\chi_o(\overrightarrow{G})$, é o menor k tal que $\overrightarrow{G}$ admite uma k-coloração orientada. O problema da k-coloração orientada de um grafo $\overrightarrow{G}$ também pode ser visto como um homomorfismo de $\overrightarrow{G}$ em um grafo $\overrightarrow{H}$ com k vértices. O problema de colorir $\overrightarrow{G}$ com $\overrightarrow{H}$ pode ser chamado de problema da $\overrightarrow{H}$-coloração e se $\overrightarrow{H}$ puder colorir $\overrightarrow{G}$ então $\overrightarrow{G}$ é $\overrightarrow{H}$-colorível.

O problema da k-coloração orientada é NP-completo para $k \geq 4$ e pode ser resolvido em tempo polinomial para $k \leq 3$. Bang-Jensen et al. [1] definem os casos em que o problema pode ser resolvido em tempo polinomial mesmo quando $k \geq 4$. O Teorema 1 divide as classes em que o problema da $\overrightarrow{T}$-coloração pode ser resolvido em tempo polinomial, que são quando $\overrightarrow{T}$ é um torneio acíclico ou quando $\overrightarrow{T}$ contém um único ciclo orientado.

Teorema 1 [1]. *Seja $\overrightarrow{T}$ um torneio. Se $\overrightarrow{T}$ contém pelo menos dois ciclos orientados, então o problema da $\overrightarrow{T}$-coloração é NP-completo. Se $\overrightarrow{T}$ é acíclico ou tem um único ciclo orientado, então o problema da $\overrightarrow{T}$-coloração pode ser resolvido em tempo polinomial.*

Os casos polinomiais em que apresentamos algoritmos e limites são definidos pelo Teorema 1. Na Seção 2 apresentamos a demonstração de que se $\overrightarrow{G}$ não contém $\overrightarrow{P_{n+1}}$ como subgrafo então $\overrightarrow{G}$ é colorível pelo torneio transitivo $\overrightarrow{T_n}$. A Seção 3 apresenta as propriedades para grafos que tem $\chi_o(\overrightarrow{G}) = 3$. Na Seção 4, demonstramos que se o grafo subjacente de $\overrightarrow{G}$ contém um único ciclo de tamanho múltiplo de 3 então $\overrightarrow{G}$ pode ser colorido por um torneio $\overrightarrow{T}$ que contém um único ciclo orientado.

2 Torneios Acíclicos

Para demonstrar o Teorema 2, Maurer et al. [3] mostram que se um grafo $\overrightarrow{G}$ pode ser colorido por um torneio transitivo $\overrightarrow{T_n}$, então $\overrightarrow{G}$ é acíclico e não contém $\overrightarrow{P_i}$ como subgrafo, $i \geq n+1$.

Teorema 2 [3]. *Se $\overrightarrow{T_n}$ é um torneio transitivo, então o problema da $\overrightarrow{T_n}$-coloração é decidível em tempo polinomial.*

Iremos apresentar uma demonstração para o resultado obtido da prova do Teorema 2 com objetivo de discorrer sobre as propriedades que Maurer et al. [3] dizem ser fáceis e obter o algoritmo de coloração para as hipóteses apresentadas no Teorema 4. Omitimos a demonstração do Teorema 3 por sua simplicidade.

Teorema 3. *Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo orientado. Então, $\chi_o(\overrightarrow{G}) = 2$ se e somente se $\forall x \in V(\overrightarrow{G})$, x é uma fonte ou x é um sumidouro.*

Teorema 4. *Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo acíclico de ordem n e $\overrightarrow{T_n}$ um torneio transitivo. Se $\overrightarrow{G}$ não contém $\overrightarrow{P_i}$ como subgrafo, $i \geq n+1$, então $\overrightarrow{G}$ é $\overrightarrow{T_n}$-colorível.*

Demonstração. Por indução no número de vértices $n = |V(\overrightarrow{T_n})|$. Por hipótese, $\overrightarrow{G}$ é acíclico, assim existe pelo menos um sumidouro $s \in V(\overrightarrow{G})$.

Considere que $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ é uma ordenação topológica de $\overrightarrow{T_n}$. Se $n = 1$, então $\overrightarrow{G}$ não contém arcos e todos seus vértices podem receber a cor r_1. Suponha que para qualquer $1 \leq n \leq p$, $p \geq 1$, a afirmação é verdadeira.

Seja $\overrightarrow{H}$ o grafo construído a partir de $\overrightarrow{G}$ pela remoção de $S \subset V(\overrightarrow{G})$ que é composto por todos os vértices sumidouros de $\overrightarrow{G}$. Note que $\overrightarrow{H}$ é acíclico já que não foram inseridos novos arcos em $\overrightarrow{G}$. Pelo menos um sumidouro fazia parte do maior caminho de $\overrightarrow{G}$, assim $\overrightarrow{H}$ não contém $\overrightarrow{P_j}$ como subgrafo, com $j \geq n$. Por hipótese, $\overrightarrow{H}$ é $\overrightarrow{T_{n-1}}$-colorível. A $\overrightarrow{T_{n-1}}$ coloração de $\overrightarrow{H}$ pode ser utilizada para definir uma $\overrightarrow{T_n}$-coloração de $\overrightarrow{G}$, atribuindo a cor r_n para todo $s \in S$, considerando que $\overrightarrow{r_k r_n} \in A(\overrightarrow{T_n}), 1 \leq k \leq n-1$. □

A demonstração do Teorema 4 fornece um algoritmo de tempo polinomial de ordem $\mathcal{O}(|V(\overrightarrow{G})| \cdot |A(\overrightarrow{G})|)$ para verificar se um grafo orientado $\overrightarrow{G}$ tem uma $\overrightarrow{T_n}$-coloração.

3 Grafos Orientados com $\chi_o(\overrightarrow{G}) = 3$

Existem dois torneios de três vértices livres de isomorfismos, $\overrightarrow{T_3^1}$ com $A(\overrightarrow{T_3^1}) = \{\overrightarrow{t_0t_1}, \overrightarrow{t_1t_2}, \overrightarrow{t_2t_0}\}$ e $\overrightarrow{T_3^2}$ com $A(\overrightarrow{T_3^2}) = \{\overrightarrow{t_0t_1}, \overrightarrow{t_2t_1}, \overrightarrow{t_2t_0}\}$. Se $\chi_o(\overrightarrow{G}) = 3$, então existe uma função de homomorfismo de $\overrightarrow{G}$ para pelo menos um destes dois torneios.

Lema 1. *Se $\overrightarrow{G}$ é acíclico e não contém $\overrightarrow{P_4}$ como subgrafo, então $\overrightarrow{G}$ é $\overrightarrow{T_3^2}$-colorível.*

Demonstração. Temos que $\overrightarrow{G}$ é acíclico e não contém $\overrightarrow{P_4}$ como subgrafo e que $\overrightarrow{T_3^2}$ é o torneio transitivo com 3 vértices, então pelo Teorema 4 o grafo $\overrightarrow{G}$ é $\overrightarrow{T_3^2}$-colorível. □

Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo orientado e G seu grafo subjacente. Seja $\overrightarrow{C} \in V(\overrightarrow{G})$ uma orientação de um ciclo $C \subseteq V(G)$ de tamanho n. Definimos $\lambda(\overrightarrow{C})$ como: $\lambda(\overrightarrow{C}) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(v_i, v_{i+1})$. Onde v_i, v_{i+1} são vértices consecutivos em C e $v_{n-1}v_0 \in E(C)$, tendo que, $\lambda(v_i, v_{i+1}) = 1$ se $\overrightarrow{v_i v_{i+1}} \in A(\overrightarrow{C})$ e $\lambda(v_i, v_{i+1}) = -1$ se $\overrightarrow{v_{i+1} v_i} \in A(\overrightarrow{C})$.

Lema 2 [6]. *Se $\overrightarrow{C}$ é a orientação de um ciclo C, então $\overrightarrow{C}$ é $\overrightarrow{T_3^1}$-colorível se e somente se $\lambda(\overrightarrow{C}) \equiv 0$ $(mod\ 3)$.*

Lema 3 [2]. *Toda árvore orientada $\overrightarrow{F}$ é $\overrightarrow{T_3^1}$-colorível.*

Lema 4. *Sejam $\overrightarrow{G}$ e G respectivamente, um grafo orientado conexo e seu grafo não direcionado subjacente. O grafo $\overrightarrow{G}$ é $\overrightarrow{T_3^1}$-colorível se e somente se a orientação $\overrightarrow{C}$ em $\overrightarrow{G}$ de todo ciclo C que é subgrafo de G tem $\lambda(\overrightarrow{C}) \equiv 0$ $(mod\ 3)$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Sejam $\overrightarrow{G}$ e G respectivamente, um grafo orientado conexo e seu grafo subjacente. Suponhamos uma orientação $\overrightarrow{C}$ em $\overrightarrow{G}$ de um ciclo C que é subgrafo de G com $\lambda(\overrightarrow{C}) \not\equiv 0$ $(mod\ 3)$. A partir do Lema 2 sabemos que $\overrightarrow{C}$ não é $\overrightarrow{T_3^1}$-colorível. Como $\overrightarrow{C}$ é subgrafo de $\overrightarrow{G}$, então $\overrightarrow{G}$ não é $\overrightarrow{T_3^1}$-colorível. Assim concluímos que para um grafo $\overrightarrow{G}$ ser $\overrightarrow{T_3^1}$-colorível todas as orientações $\overrightarrow{C}$ de todos os ciclos C de seu grafo subjacente G têm $\lambda(\overrightarrow{C}) \equiv 0$ $(mod\ 3)$.

($\Longleftarrow$) Sejam $\overrightarrow{G}$ e G respectivamente, um grafo orientado $\overrightarrow{T_3^1}$-colorível conexo e seu grafo subjacente. Dividimos a demonstração em dois casos:

1. G é acíclico.
   Se G é acíclico, então $\overrightarrow{G}$ é uma árvore e pelo Lema 3 sabemos que $\overrightarrow{G}$ é $\overrightarrow{T_3^1}$-colorível.

2. Toda orientação $\overrightarrow{C}$ em $\overrightarrow{G}$ de todo ciclo C que é subgrafo de G tem $\lambda(\overrightarrow{C}) \equiv 0$ $(mod\ 3)$.
   A demonstração neste caso é feita por indução no número de vértices $n = |V(\overrightarrow{G})|$. Se $n = 1$, então atribuímos a cor 0 para este vértice. Suponha que para qualquer $1 \leq n \leq p$, $p \geq 1$, a afirmação é verdadeira. Seja f a função de homomorfismo entre $\overrightarrow{G}$ e $\overrightarrow{T_3^1}$, e F o conjunto de vértices coloridos de $\overrightarrow{G}$. Definimos a coloração de v de acordo com dois casos:

(a) $|\Gamma_{\overrightarrow{G}}(v) \bigcap F| = 1$.
Seja x um vértice tal que $x \in F$. Se $\overrightarrow{xv} \in A(\overrightarrow{G})$, então $f(v) = f(x) + 1 \ (mod\ 3)$. Se $\overrightarrow{vx} \in A(\overrightarrow{G})$, então $f(v) = (f(x) - 1) \ (mod\ 3)$.

(b) $|\Gamma_{\overrightarrow{G}}(v) \bigcap F| \geq 2$.
Por hipótese G é conexo. Se dois vértices $v_i, v_j \in F$, então existe um caminho entre v_i e v_j em que todos os vértices do caminho já foram coloridos pois a coloração é definida na ordem da vizinhança dos vértices já coloridos. Se $|\Gamma_{\overrightarrow{G}}(v) \bigcap F| \geq 2$, então v forma um ciclo com qualquer par de vizinhos coloridos pois existe um caminho entre este par de vértices. Considere $v_i, v_j \in \Gamma_{\overrightarrow{G}}(v) \bigcap F$ como um par qualquer de vizinhos coloridos de v. Sem perda de generalidade considere $\overrightarrow{P}$ como o caminho entre v_i e v_j e $\overrightarrow{C} = \{v_i, \ldots, v_k, \ldots, v_j, v\}$, $i \leq k \leq j$, o ciclo formado por $\overrightarrow{P}$ com a adição de v. Por hipótese $\lambda(\overrightarrow{C}) \equiv 0 \ (mod\ 3)$, então pelo Lema 2 $\overrightarrow{C}$ tem uma $\overrightarrow{T_3^1}$-coloração e temos que $f(v) = (f(v_i) + \sum_{k=i}^{j} \lambda(v_k, v_{k+1})) \ (mod\ 3)$. □

A demonstração do Lema 4 fornece um algoritmo de tempo polinomial de ordem $\mathcal{O}(|V(\overrightarrow{G})| \cdot |A(\overrightarrow{G})|^2)$ para verificar se existe um homomorfismo entre um grafo $\overrightarrow{G}$ e $\overrightarrow{T_3^1}$. Omitimos a demonstração do Teorema 5 pois a mesma consiste na aplicação dos lemas apresentados nessa seção.

Teorema 5. *Sejam $\overrightarrow{G}$ e G, respectivamente, um grafo orientado e seu grafo subjacente. $\chi_o(\overrightarrow{G}) = 3$ se e somente se $\overrightarrow{G}$ tem pelo menos um vértice que não é uma fonte nem um sumidouro e toda orientação $\overrightarrow{C}$ em $\overrightarrow{G}$ de todo ciclo C que é subgrafo de G tem $\lambda(\overrightarrow{C}) \equiv 0 \ (mod\ 3)$ ou $\overrightarrow{G}$ é acíclico e não contém $\overrightarrow{P_4}$ como subgrafo.*

4 Torneios que Contêm um Único Ciclo Orientado

Teorema 6 [4]. *Seja $\overrightarrow{T}$ um torneio e um inteiro $k \geq 3$. Se $\overrightarrow{T}$ contém $\overrightarrow{C}_k$ como subgrafo, então $\overrightarrow{T}$ contém todo $\overrightarrow{C}_i$ como subgrafo, com $i = 3, \ldots, k$.*

A partir do Teorema 6 é possível concluir que se um torneio $\overrightarrow{T}$ contém apenas um ciclo orientado, então este ciclo tem tamanho 3.

Descrevemos uma redução que transforma um grafo $\overrightarrow{G}$ em um grafo $\overrightarrow{G^R}$ com $|V(\overrightarrow{G^R})| \leq |V(\overrightarrow{G})|$, de maneira que $\overrightarrow{G^R}$ não contém vértices fonte ou vértices sumidouro.

Redução 1. *Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo orientado que contém vértices fonte ou vértices sumidouro. O grafo $\overrightarrow{G^R}$ é obtido a partir de $\overrightarrow{G}$ por:*

1. *Removendo o conjunto $FS = \{x : x \in V(\overrightarrow{G}),\ (d^-_{\overrightarrow{G}}(x) = 0$ e $d^+_{\overrightarrow{G}}(x) \neq 0)$ ou $(d^+_{\overrightarrow{G}}(x) = 0$ e $d^-_{\overrightarrow{G}}(x) \neq 0)\}$ de $\overrightarrow{G}$;*
2. *Repita o item i até que $FS = \{\emptyset\}$.*

Teorema 7. *Sejam $\overrightarrow{G}$ e $\overrightarrow{G^R}$ respectivamente, um grafo orientado de ordem n e o grafo obtido a partir da aplicação da Redução 1 em $\overrightarrow{G}$. Se todo ciclo C no grafo subjacente de $\overrightarrow{G^R}$ tem a orientação $\overrightarrow{C}$ com $\lambda(\overrightarrow{C}) \equiv 0\ (mod\ 3)$, então existe um torneio $\overrightarrow{T}$ que contém um único ciclo orientado tal que $\overrightarrow{G}$ é $\overrightarrow{T}$-colorível.*

Demonstração. Por hipótese, $\overrightarrow{T}$ contém um único ciclo orientado, então $\overrightarrow{T}$ pode ser dividido em $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ componentes fortemente conexas, e apenas a componente que contém o ciclo orientado tem tamanho diferente de 1. Com isso, podemos observar que $\overrightarrow{T}$ é construído a partir de $\overrightarrow{T^1_3}$ adicionando uma sequência de fontes ou sumidouros.

A demonstração é feita por indução no número n de vértices de $\overrightarrow{G}$. O grafo $\overrightarrow{G^R}$ é utilizado como base da indução. Por hipótese, a orientação de todo ciclo $\overrightarrow{C}$ em $\overrightarrow{G^R}$ tem $\lambda(\overrightarrow{C}) \equiv 0\ (mod\ 3)$, então pelo Lema 4 $\overrightarrow{G^R}$ é $\overrightarrow{T^1_3}$-colorível. Suponha para qualquer $n \leq p$, $p \geq |V(\overrightarrow{G^R})|$, que a afirmação é verdadeira.

Seja $\overrightarrow{H}$ o grafo construído a partir de $\overrightarrow{G}$ pela remoção do conjunto $F = \{x : x \in V(\overrightarrow{G}),\ d^-_{\overrightarrow{G}}(x) = 0 \text{ e } d^+_{\overrightarrow{G}}(x) \neq 0\}$ e do conjunto $S = \{x : x \in V(\overrightarrow{G}),\ d^+_{\overrightarrow{G}}(x) = 0 \text{ e } d^-_{\overrightarrow{G}}(x) \neq 0\}$ de $\overrightarrow{G}$. Por hipótese, uma $\overrightarrow{T}$-coloração pode ser atribuída para $\overrightarrow{H}$, pois toda orientação $\overrightarrow{C}$ em $\overrightarrow{H^R}$ de todo ciclo C que é subgrafo do grafo subjacente de $\overrightarrow{H^R}$ continua tendo $\lambda(\overrightarrow{C}) \equiv 0\ (mod\ 3)$ pois $F \notin \overrightarrow{G^R}$ e $S \notin \overrightarrow{G^R}$.

A $\overrightarrow{T}$-coloração de $\overrightarrow{H}$ pode ser utilizada para definir uma $\overrightarrow{T}$-coloração de $\overrightarrow{G}$ considerando dois casos, de acordo com os conjuntos F e S. Se $F \neq \emptyset$, então uma fonte t_i é adicionada em $\overrightarrow{T}$ e todos os vértices do conjunto F são coloridos com a cor t_i. Se $S \neq \emptyset$, então um sumidouro t_i é adicionado em $\overrightarrow{T}$ e todos os vértices do conjunto S são coloridos com a cor t_i. O torneio $\overrightarrow{T}$ continua contendo um único ciclo orientado, pois o vértice adicionado é uma fonte ou um sumidouro. Como t_i é um novo vértice em $\overrightarrow{T}$ a $\overrightarrow{T}$-coloração de $\overrightarrow{G}$ é válida. $\square$

A partir da demonstração do Teorema 7, podemos obter um algoritmo de tempo polinomial de ordem $\mathcal{O}(|V(\overrightarrow{G})|^2 + |V(\overrightarrow{G})| \cdot |A(\overrightarrow{G})|^2)$ para o problema da $\overrightarrow{T}$-coloração quando $\overrightarrow{T}$ contém um único ciclo orientado.

Referências

[1] J. Bang-Jensen, P. Hell, and G. MacGillivray. The complexity of colouring by semicomplete digraphs. *SIAM journal on discrete mathematics*, 1(3):281–298, 1988.

[2] H. C. da Silva. *Coloração Orientada: Uma Abordagem Estrutural e De Complexidade*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.

[3] H. A. Maurer, J. Sudborough, and E. Welzl. On the complexity of the general coloring problem. *Information and control*, 51(2):128–145, 1981.

[4] J. W. Moon. *Topics on tournaments in graph theory.* Courier Dover Publications, Mineola, New York, 2015.

[5] A. Raspaud and E. Sopena. Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs. *Information Processing Letters*, 51(4):171–174, 1994.

[6] E. Sopena. Homomorphisms and colourings of oriented graphs: An updated survey. *Discrete Mathematics*, 2015.

Mateus de Paula Ferreira
Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás
Goiânia, Brasil
mateuspaula@inf.ufg.br

Hebert Coelho da Silva
Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás
Goiânia, Brasil
hebert@inf.ufg.br