Matemática Contemporânea, Vol. 46, 230–238
http://doi.org/10.21711/231766362020/rmc4624

Um estudo de redes com fluxos ramificados arco–disjuntos

Jonas Costa **Cláudia Linhares Sales**
Raul Lopes **A. Karolinna Maia**

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre fluxos ramificados, que são fluxos que possuem um vértice fonte que envia fluxo para todos os demais vértices, de modo que, cada um dos demais retenha uma unidade de fluxo. Tendo como parâmetro a função de capacidade da rede, estudamos a complexidade do problema de decidir se uma rede possui fluxos ramificados arco-disjuntos, propomos uma conjectura que caracteriza as redes que admitem tais fluxos e mostramos alguns casos em que ela é válida.

1 Notação e definições

Uma *rede* $\mathcal{N} = (V, A, u)$ é definida por um multigrafo direcionado $D = (V, A)$ e por uma função de *capacidade* $u : A \to \mathbb{Z}_+$. Escrevemos $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv l)$, para indicar que a capacidade de todos os arcos da rede é l e utilizamos n para denotar o número de vértices da rede. Um *fluxo* em

2000 AMS Subject Classification: 68R10, 05C75 and 94C15.
Key Words and Phrases: Fluxos ramificados, Fluxos arco–disjuntos, Ramificações.
This study was partly supported by CAPES/STIC-AmSud 88881.197438/2018-01, CNPq - Universal project 425297/2016-0 and FUNCAP - PRONEM PNE-011200061.01.00/16

$\mathcal{N}$ é uma função $x : A \rightarrow Z_+$ que satisfaz $x(vw) \leq u(vw)$, para todo arco $vw \in A$. O *balanço* de um vértice $v \in V$, com respeito ao fluxo x, é dado por $b_x(v) = \sum_{vt \in A} x(vt) - \sum_{sv \in A} x(sv)$. Dois fluxos x e y em uma mesma rede $\mathcal{N} = (V, A, u)$ são *arco-disjuntos*, se $x(vw) \cdot y(vw) = 0$ para todo arco $vw \in A$. Por simplicidade, denotamos o conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$ por $[k]$.

Uma *ramificação* em um digrafo D é um subdigrafo gerador de D que é uma árvore com um vértice especial, chamado de *raiz*, que possui grau de entrada zero enquanto todos os demais vértices possuem grau de entrada um. Uma *s-ramificação* é uma ramificação cuja a raiz é o vértice s.

Dados uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u)$, um vértice $s \in V$ e um conjunto de vértices $Z \subseteq V$ tal que $s \in Z$, definimos um *fluxo* (s, Z)*-ramo* como sendo um fluxo x tal que $b_x(v) = |Z| - 1$ se $v = s$, $b_x(v) = -1$ se $v \in Z - \{s\}$ e $b_x(v) = 0$ se $v \in V - Z$. Além disso, vamos restringir que apenas os vértices em Z recebam fluxo, ou seja, para todo $w \in V - Z$, temos: $\sum_{vw \in A} x(vw) = 0$. Se $Z = V$, então dizemos que x é um *fluxo s-ramificado*.

2 A complexidade de verificar se uma rede possui fluxos ramificados arco-disjuntos

Resultados anteriores de [1, 2] mostram que o problema de decidir se uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u)$ admite dois fluxos s-ramificados arco-disjuntos é, para um inteiro k fixo, NP-completo se $u \equiv k$, e polinomial se $u \equiv n - k$. Além disso, supondo a *Hipótese de Tempo Exponencial* (ETH) [4], o problema não pode ser polinomial se $u \equiv n - f(n)$, onde f é uma função inteira limitada por $\log(n)^{1+\epsilon}$ e $n/2$, para algum $\epsilon > 0$. A demonstração deste último resultado, obtido em [2], estava incorreta, mas nós refizemos a prova e mostramos também que, ainda supondo a ETH, se fixarmos a capacidade em qualquer valor entre $log(n)^{1+\epsilon}$ e $n/2$, não é possível obter algoritmo polinomial para o problema. A ETH afirma que existe um real positivo s tal que o 3-SAT não pode ser resolvido por um algoritmo de ordem $O(2^{sn}(n + m))$ ou $O(2^{sm}(n + m))$, onde n e m são, respectivamente, os números de variáveis e cláusulas [4]. Os resultados mencionados acima estão ilustrados na Figura 1.

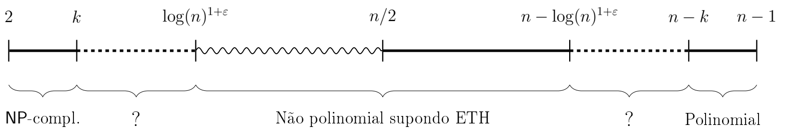

Figura 1: Distribuição da complexidade de acordo com capacidades. Os segmentos contínuos demarcam resultados anteriores, os tracejados estão em aberto e o segmento curvo é referente ao Teorema 1.

Teorema 1. *Seja $\epsilon > 0$ arbitrário e $f(n)$ uma função inteira tal que $\log(n)^{1+\epsilon} \leq f(n) \leq n/2$, para todo $n > 0$. Além disso, suponha que existe uma constante C^* tal que, para todo $c \geq C^*$, existe um n satisfazendo $f(n) = c$.*

Dadas essas condições, seja $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv f(n))$ uma rede com n vértices e um vértice especial $s \in V$. Então, assumindo válida a ETH, não existe algoritmo polinomial (em n) para decidir se $\mathcal{N}$ possui dois fluxos arco-disjuntos s-ramificados.

Demonstração. Dada uma instância do 3-SAT $\mathcal{F} = C_1 * \cdots * C_m$, com variáveis $v_1, ..., v_\ell$, vamos construir uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv f(n))$, tal que $\mathcal{N}$ possui dois fluxos s-ramificados e arco-disjuntos se, e somente se, $\mathcal{F}$ é satisfatível.

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_\ell$ e $W_1, W_2, \ldots, W_{\ell-1}$ conjuntos de vértices de tamanho dois ($X_i = \{x_i, \bar{x}_i\}, \forall i \in [\ell]$ e $W_j = \{w_j^1, w_j^2\}, \forall j \in [\ell - 1]$). Seja Q um conjunto de vértices independentes com q vértices (o valor de q será determinado posteriormente). Seja M uma estrela, com m é vértices e com dois arcos paralelos da raiz t' para os demais $m - 1$ vértices. Adicionando ainda m vértices correspondentes às cláusulas de $\mathcal{F}$ e dois vértices especiais s e t, temos que o conjunto de vértices de $\mathcal{N}$ será dado por: $V = \{s, t, c_1, c_2, \ldots, c_m\} \cup \bigcup_{i=1}^{\ell} X_i \cup \bigcup_{i=1}^{\ell-1} W_i \cup Q \cup V(M)$.

Em seguida, considere a adição de dois arcos paralelos de s para cada um dos vértices de Q e de X_1, todos os arcos possíveis de X_i para W_i e de

W_i para X_{i+1}, $\forall i \in [\ell - 1]$. Adicionamos também, os arcos de $x_\ell t, \bar{x}_\ell t, tt'$ e st'. Por último, para cada cláusula C_j de $\mathcal{F}$, com $j \in [m]$, adicionamos dois arcos paralelos de x_i para c_j, se C_j contém o literal v_i e dois arcos paralelos de $\bar{x}_i$ para c_j, se C_j contém o literal $\bar{v}_i$, $\forall i \in [\ell]$.

Dessa forma, temos que $|V| = n = 4\ell + 2m + q$ e vamos determinar o valor de q de maneira que $f(n) = f(4\ell + 2m + q) = 2\ell + m$. Note que, por definição de f, isso é possível desde que $2\ell + m \geq C^*$. Porém, não é problema assumir isso já que C^* é constante.

Suponha primeiro o caso em que $\mathcal{N}$ possui dois fluxos z_1 e z_2 s-ramificados que sejam arco-disjuntos. Note que o grau de entrada dos vértices em $V - \{s, c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ é dois, então, dos arcos que entram nesses vértices um é utilizado por z_1 e o outro por z_2. Além disso, como os vértices em $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ possuem grau de saída zero, o grau de entrada desses vértices é um em D_{z_1} e em D_{z_2}. Logo, temos que D_{z_i} é uma ramificação, ou seja, para todo vértice $u \in V$ existe um único (s, u)-caminho em D_{z_i}, para $i = 1, 2$. Suponha, sem perda de generalidade, que $tt' \in A_{z_1}$, o que implica $z_1(tt') = m$. Seja P^F o (s, t')-caminho em D_{z_1}. Observe que tt' é o último arco desse caminho, e que $|P^F| = 2\ell + 2$. Logo, o fluxo no primeiro arco de P^F é maior ou igual a $2\ell + m$. Como $2\ell + m = f(n)$, essa é exatamente a quantidade de fluxo enviada por s pelo primeiro arco de P^F. Observe então que nenhum dos vértices em P^F pode enviar fluxo para os vértices em $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, pois caso contrário, não chegaria fluxo suficiente em t'. Adicionalmente, note que P^F intercepta exatamente um vértice de cada X_i, para $i \in [\ell]$. Isso significa que, em z_1, os vértices de cláusula recebem fluxo apenas de vértices que não estão em P^F. Isso implica que podemos atribuir v_i =*0*, se $x_i \in V(P^F)$ e v_i =*1*, se $\bar{x}_i \in V(P^F)$, $\forall i \in [\ell]$. Como cada vértice em $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ recebe fluxo de algum vértice que não está em P^F, temos que cada cláusula de $\mathcal{F}$ possui pelo menos um literal com valor 1. Logo, $\mathcal{F}$ é satisfatível.

Suponha agora que $\mathcal{F}$ é satisfatível e seja T uma atribuição verdade de $\mathcal{F}$. Seja X^V o conjunto que contém os vértices x_i, caso v_i =*1* pela atribuição T, e $\bar{x}_i$ caso contrário, $\forall \in [\ell]$. Seja $X^F = \bigcup_{i=1}^{\ell} X_i - X^V$.

Defina P_1^F (resp. P_2^V) como sendo o (s,t)-caminho que passa por todos os vértices em X^F (resp. X^V) e por todos os vértices w_j^1, para $j \in [\ell-1]$. Note que $|V(P_1^F)| = |V(P_2^V)| = 2\ell+1$. Similarmente, P_1^V (resp. P_2^F) é o caminho direcionado que inicia em s e passa por todos os vértices em X^V (resp. X^F) e pelos vértices w_j^2. Os caminhos P_1^V e P_2^F também possuem os mesmo número de vértices, a saber, 2ℓ. Podemos escolher o primeiro arco de cada um dos caminhos P_1^V, P_2^V, P_1^F e P_2^F, de modo que os sejam arco-disjuntos entre si.

Vamos construir dois fluxos arco-disjuntos s-ramificados em $\mathcal{N}$ da seguinte maneira: Em z_1, enviamos $2\ell+m$ unidades de fluxo pelo primeiro arco de P_1^F. Como cada vértice do caminho consome uma unidade de fluxo, o vértice t é alcançado com $m+1$ unidades. Além disso, enviamos m unidades para o vértice t' utilizando o arco tt'. Em z_2, enviamos $2\ell-1$ unidades de fluxo para distribuir entre os vértices de P_2^F e m unidades pelo arco st'. Além disso, enviamos $2\ell+m-1$ pelo primeiro arco de P_1^V em z_1, e $2\ell+m$ pelo primeiro arco de P_2^V em z_2. Note que, considerando a atribuição T, cada um dos m vértices em $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ é vizinho de pelo menos um vértice de P_i^V, para $i = 1, 2$, e dessa forma podemos distribuir o fluxo ao longo de P_i^V para alcançar esses vértices. Enviamos ainda, em ambos os fluxos, 1 unidade de fluxo para cada vértice em Q, visto que estes são vizinhos de saída de s. Como P_1^V, P_2^V, P_1^F e P_2^F são arco-disjuntos e os vértices em $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\} \cup Q \cup V(M) - \{t'\}$ possuem arcos paralelos, nenhum arco precisa ser utilizado por z_1 e z_2 ao mesmo tempo, ou seja, z_1 e z_2 são arco-disjuntos.

Suponha, por contradição, que existe um algoritmo polinomial para decidir se uma rede $\mathcal{N}$ com n vértices e com vértice especial s possui dois fluxos arco-disjuntos s-ramificados, e que a complexidade desse algoritmo é $O(n^c)$, para alguma constante c.

Como $(\log(n))^{1+\epsilon} \leq f(n)$, temos que $\log(n) \leq f(n)^{1/(1+\epsilon)}$, e podemos obter um algoritmo para resolver o 3-SAT com complexidade: $O(n^c) = O(2^{(\log(n))^c}) = O(2^{(f(n)^{(1/1+\epsilon)})^c}) = O(2^{c(2\ell+m)^{(1/1+\epsilon)}})$. No pior caso, todas as cláusulas são formadas por variáveis distintas, ou seja, $\ell \leq 3m$. Então, a complexidade é no máximo $O(2^{c7m^{(1/1+\epsilon)}})$. Como $1/(1+\epsilon) < 1$, temos um algoritmo subexponencial (no número de cláusulas) para o 3-SAT, o que contradiz a ETH. $\square$

3 Condições para a existência de fluxos ramificados arco-disjuntos

A seguir, temos uma caracterização dos multigrafos direcionados que possuem k ramificações arco-disjuntas enraizadas em um dado vértice.

Teorema 2 ([3])**.** *Um multigrafo direcionado $D = (V, A)$ com vértice especial s possui k s-ramificações arco-disjuntas se, e somente se, $d^-_D(X) \geq k$, para todo $\emptyset \neq X \subseteq V - s$.*

Essa condição é a mesma usada por [1] para caracterizar as redes do tipo $\mathcal{N}(V, A, u \equiv n-1)$ que possuem k fluxos s-ramificados arco-disjuntos, mas neste caso a função de capacidade não impõe nenhum tipo de restrição. Isso nos leva a questionar se é possível generalizar o Teorema 2 de modo que funcione para qualquer valor de capacidade λ, isto é, caracterizar as redes com função de capacidade $u \equiv \lambda$ que possuem k fluxos s-ramificados.

Conjectura 1. *Seja $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv \lambda)$ uma rede com n vértices e um vértice especial s. Então, para todo $1 \leq \lambda \leq n-1$, $\mathcal{N}$ admite k fluxos s-ramificados arco-disjuntos se, e somente se, $d^-_D(X) \geq k \left\lceil \frac{|X|}{\lambda} \right\rceil, \forall \emptyset \neq X \subseteq V - s$.*

Até o momento, $\lambda = n-1$ é o único caso para o qual sabemos, por um resultado de [1], que a conjectura acima é válida de modo geral. Porém, é possível verificar que a condição da Conjectura 1 é necessária para a existência de k fluxos s-ramificados em uma rede. Considerando apenas um fluxo s-ramificado sabemos que, para um conjunto de vértices $X \subseteq V - s$: se $|X| \leq \lambda$, um arco tem capacidade suficiente para conduzir o fluxo necessário a X de forma que cada vértice de X possa reter uma unidade. Porém, se $|X| > \lambda$, serão necessários pelo menos $\left\lceil \frac{|X|}{\lambda} \right\rceil$ arcos para tanto. Adicionalmente, se queremos k fluxos s-ramificados arco-disjuntos, precisaremos de pelo menos $k\left\lceil\frac{|X|}{\lambda}\right\rceil$ arcos entrando em X. Dito isso, nos próximos resultados, vamos argumentar apenas que a condição é suficiente.

A seguir, provamos que a Conjectura 1 é válida para qualquer valor de λ nos casos em que D é um multicaminho, onde um *multicaminho* é um multidigrafo $D=(V,A)$ que admite uma ordenação $v_1, v_2, ..., v_n$ dos seus vértices, de maneira todo arco de D é do tipo v_iv_{i+1} e existe pelo menos um arco v_iv_{i+1} para todo $i \in [n-1]$. Utilizamos $\mu(v_i, v_{i+1})$ para denotar o número de arcos entre v_iv_{i+1}.

Lema 1. *Seja $D = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, A)$ um multicaminho. Então, para $\lambda \in [n-1]$, a rede $\mathcal{N} = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, A, u \equiv \lambda)$ admite k fluxos v_1-ramificados se, e somente se, $d^-_D(X) \geq k\left\lceil\frac{|X|}{\lambda}\right\rceil, \forall \emptyset \neq X \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$.*

Demonstração. Seja $D = (\{v_1, v_2, ..., v_n\}, A)$ um multicaminho que satisfaz a desigualdade acima. Vamos construir k fluxos s-ramificados na rede $\mathcal{N}(V, A, u \equiv \lambda)$, onde $s = v_1$. Com exceção de v_n, todos os demais vértices de D possuem exatamente um vizinho de saída, portanto, para todo $2 \leq i \leq n-1$, o vértice v_i deve receber $n-i+1$ unidades de fluxo do vértice v_{i-1} e enviar $n-i$ unidades para v_{i+1}. Observe que para todo $1 \leq i \leq n-1$ temos $\mu(v_i, v_{i+1}) \geq k\left\lceil\frac{n-i}{\lambda}\right\rceil$. Então, para todo $i \in [n-1]$, separamos $\left\lceil\frac{n-i}{\lambda}\right\rceil$ arcos v_iv_{i+1} distintos para o fluxo x_j e fazemos $x_j(v_i, v_{i+1}) = \lambda$ em $\left\lfloor\frac{n-i}{\lambda}\right\rfloor$ deles e, se for o caso, damos ao arco sobressalente o valor $(n-i) \mod \lambda$, para todo $j \in [k]$. $\square$

Veremos na sequência a prova da Conjectura 1 para $\lambda = \lfloor n/2 \rfloor$ e $k = 1$.

Lema 2. *Uma rede $\mathcal{N} = (V, A, u \equiv \lfloor n/2 \rfloor)$ com n vértices e um vértice especial s admite um fluxo s-ramificado se, e somente se,*

$$d^-_D(X) \geq \left\lceil\frac{2|X|}{n}\right\rceil, \forall \emptyset \neq X \subseteq V - s. \tag{1}$$

Demonstração. Suponha que $\mathcal{N}$ satisfaz (1). Seja $Z \subseteq V$ o maior conjunto para o qual $\mathcal{N}$ admite um fluxo z que é um (s, Z)-ramo. Assumindo, por contradição, que $Z \neq V$, seja $W = V - Z$ o conjunto dos vértices que não são "alcançados" por z. Por (1), temos que $d^-_D(W) \geq 1$, então existe um vértice $w \in W$ que é vizinho de saída de um vértice $v \in Z$. Sabemos então que todo (s, v)-caminho, em D, passa por algum arco *saturado* pq, ou seja, $z(pq) = \lfloor n/2 \rfloor$, do contrário, poderíamos enviar uma unidade de fluxo a mais para o vértice v e repassá-la para w pelo arco vw e esse fluxo modificado seria um $(s, Z \cup \{w\})$-ramo com mais vértices que z, um absurdo.

Considere primeiro o caso em que existe um único saturado, e seja pq esse arco. Seja $Y \subseteq Z - p$ o conjunto dos vértices que são alcançáveis por q no fluxo z, ou melhor, o conjunto dos vértices y tais que existe um (q, y)-caminho em D_z. Observe que $v \in Y$ e que todo (s, W)-caminho[1] P passa por pq, senão poderíamos enviar uma unidade de fluxo por P e alcançar um novo vértice em W, o que também seria absurdo. Isso implica que $|Y| = \lfloor n/2 \rfloor$, pois q precisa "dissipar" todas as $\lfloor n/2 \rfloor$ unidades de fluxo que recebe de p. Além disso, temos que $(Z - Y, W)_D = 0$, pois do contrário também seria possível alcançar um novo vértice em W, e $(Z - Y, Y)_D = 1$ (devido à existência de pq). Como $|Y \cup \{w\}| > \lfloor n/2 \rfloor$, deve existir um arco além de pq que entra em $Y \cup \{w\}$, porém esse arco não pode vir de $Z - Y$, logo esse arco vem de algum vértice $w' \neq w$ em W. Considerando agora $Y \cup \{w, w'\}$, o mesmo argumento pode ser aplicado repetidamente, até a obtenção do conjunto $Y \cup W$. Temos então duas possibilidades: ou existe um arco que entra em W vindo de $Z - Y$, que observamos não ser possível, ou $d^-_D(Y \cup W) < 2$, o que por (1) é absurdo já que $|Y \cup W| > n/2$. Logo, $Z = V$ e z é na verdade um fluxo s-ramificado.

Agora, considere o caso em que existem mais de um arco saturado. Observe que existe no máximo um arco saturado que sai de s, pois do contrário z seria um fluxo ramificado. Então, deve existir um caminho que sai de s passa por todos os arcos saturados. Tomamos pq como sendo o último arco desse caminho e a partir desse ponto a argumentação é a mesma do caso anterior. $\square$

[1] Abuso de notação para indicar um caminho de s para qualquer vértice em W.

Referências

[1] Bang-Jensen, J., and Bessy, S. (Arc-) disjoint flows in networks. *Theoretical Computer Science 526* (2014), 28–40.

[2] Bang-Jensen, J., Havet, F., and Yeo, A. The complexity of finding arc-disjoint branching flows. *Discrete Applied Mathematics 209* (2016), 16–26.

[3] Edmonds, J. Edge-disjoint branchings. *Combinatorial Algorithms* (1973), 91–96.

[4] Impagliazzo, R., Paturi, R., and Zane, F. Which problems have strongly exponential complexity? *Journal of Computer and System Sciences 63*, 4 (2001), 512 – 530.

Jonas Costa
Departamento de Computação
Universidade Federal do Ceará
Fortaleza, Brasil
jonascosta@lia.ufc.br

Cláudia Linhares Sales
Departamento de Computação
Universidade Federal do Ceará
Fortaleza, Brasil
linhares@lia.ufc.br

Raul Lopes
Departamento de Computação
Universidade Federal do Ceará
Fortaleza, Brasil
raul.lopes@lia.ufc.br

A. Karolinna Maia
Departamento de Computação
Universidade Federal do Ceará
Fortaleza, Brasil
karolmaia@ufc.br