Matemática Contemporânea, Vol. 46, 221–229
http://doi.org/10.21711/231766362020/rmc4623

Número de intervalo P_3 de prismas complementares de grafos acíclicos

Cristine Cardoso **Erika M. M. Coelho**

Resumo

Motivados por trabalhos anteriores sobre número de intervalo para produtos de grafos, nós apresentamos igualdades e limites superiores para o número de intervalo P_3 para prismas complementares de grafos acíclicos. Mostramos igualdades para o número de intervalo P_3 para prismas complementares de grafos estrela e grafos caterpillar e mostramos limites superiores para prismas complementares de árvores.

1 Introdução

Um *grafo* $G = (V(G), E(G))$ é um par ordenado que consiste em um conjunto $V(G)$ de nós (ou *vértices*) e um conjunto $E(G)$ de *arestas* que relacionam pares de vértices. Grafos são amplamente utilizados na modelagem de problemas que envolvam ligação entre pares de elementos, como enlaces de redes de computadores, estradas entre cidades, moléculas químicas etc.

2000 AMS Subject Classification: 05C99.

Key Words and Phrases: Convexidade, número de intervalo P_3, prismas complementares.

Gostaríamos de agradecer aos revisores por todas as observações e por apontar um erro em uma versão anterior da prova do Lema 1.

Convexidade em grafos é uma abordagem para modelar situações envolvendo alguns processos de disseminação entre entidades, por exemplo, propagação de doenças e opinião [8]. Uma *convexidade* sobre G é definida como uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $V(G)$ tal que $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechado sobre intersecções. Os conjuntos em $\mathcal{C}$ são chamados *convexos.*

Algumas convexidades em grafos podem ser definidas através de uma coleção $\mathcal{P}$ de caminhos. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ de vértices é $\mathcal{P}$ *convexo* quando, para cada $u, v \in S$, se w pertence a um caminho $P = (u, \ldots, v) \in \mathcal{P}$ então $w \in S$. Se $\mathcal{P}$ for o conjunto de caminhos mínimos, dizemos que se trata da convexidade *geodética* [3, 5]. A convexidade que trata de caminhos de tamanho 2 é a *convexidade* P_3 [6, 9].

O *intervalo fechado* entre dois vértices u e v, denominado $I_{\mathcal{C}}[u, v]$, é o conjunto formado por u, v e todos os vértices contidos em algum caminho de $\mathcal{P}$ entre u e v. Dado um conjunto $S \subseteq V(G)$, seu intervalo fechado, $I[S]$, é a união de todos os intervalos fechados entre cada par de vértices $u, v \in S$. Dizemos que um conjunto S é um *conjunto convexo* se $I[S] = S$. Se $I[S] = V(G)$, então S é um *conjunto de intervalo.*

Na convexidade P_3 se $I[S] = V(G)$, onde $S \subseteq V(G)$, então cada vértice em $V(G) \backslash S$ tem no mínimo dois vizinhos em S. Por esta razão, determinar o menor subconjunto S tal que $I[S] = V(G)$ é o mesmo que determinar o número de 2-dominação de um grafo [1].

A convexidade em grafos é uma abordagem aplicada em vários problemas. Inicialmente o estudo da convexidade P_3 foi direcionado ao problema da infecção por contaminação em uma grade quadrada, proposto em [2]. A situação proposta é de uma grade celular quadrada com algumas células inicialmente contaminadas. Uma célula inicialmente não contaminada é infectada caso duas células vizinhas estejam contaminadas. Pergunta-se quantas células iniciais são necessárias para infectar, iterativamente, todas as células da grade.

O *número de intervalo* $i_{\mathcal{C}}$ de um grafo G é a cardinalidade do menor conjunto de intervalo, isto é, a cardinalidade do menor conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $I[S] = V(G)$.

Na convexidade geodética o problema de decisão relacionado ao número de intervalo é um problema NP-completo para prismas complementares [5] e em [3] foram apresentados limites para produto cartesiano. Considerando a convexidade P_3, o número de intervalo também é NP-completo para grafos gerais [7] e para a classe dos prismas complementares [9].

Seja o grafo G e o seu complemento $\overline{G}$. Para cada vértice $v \in V(G)$ denotaremos $\overline{v} \in V(\overline{G})$ como seu *vértice correspondente*, e para um conjunto $X \subseteq V(G)$, o conjunto $\overline{X}$ será o *conjunto correspondente* de vértices em $V(\overline{G})$.

Este trabalho se dedica ao estudo do número de intervalo, i_{P_3}, considerando a convexidade P_3 para algumas classes de prismas complementares. Para um grafo G com conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E(G)$, o *prisma complementar* de G é o grafo denotado por $G\overline{G}$ com conjunto de vértices $V(G\overline{G}) = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n\}$ e conjunto de arestas $E(G\overline{G}) = E(G) \cup \{\overline{v}_i\overline{v}_j : 1 \leq i < j \leq n \text{ and } v_iv_j \notin E(G)\} \cup \{v_1\overline{v}_1, \dots, v_n\overline{v}_n\}$.

Motivados por [9] nós estabelecemos resultados sobre o número de intervalo P_3 para algumas classes de primas complementares. Apresentamos o número de intervalo P_3 para os prismas complementares de grafos estrela, limites superiores e inferiores para prismas complementares de grafos caterpillar e árvores.

Para estes últimos, ilustraremos instâncias em que pode-se obter uma igualdade no número de intervalo P_3.

O restante do texto está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 definimos alguns conceitos básicos e na Seção 3 apresentamos nossos resultados.

2 Preliminares

Nós utilizaremos terminologias e notações básicas e consideraremos somente grafos finitos, simples e não direcionados.

Considere o grafo G. Dado um vértice $v \in V(G)$ sua *vizinhança aberta*, denotada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v, e sua *vizinhança fechada* é $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. A *excentricidade* de um vértice v, $\epsilon(v)$, é a distância máxima de v a qualquer outro vértice $u \in G$. O *grau*, $d(v)$, de um vértice é dado por $d(v) = |N(v)|$.

Em um grafo, os vértices de grau um são chamados de *folhas* ou *vértices pendentes*, e o vizinho de uma folha é chamado de *vértice de suporte*. Dado um vértice de suporte v, denominamos L_v o conjunto de folhas adjacentes a v. Um vértice de suporte é um *vértice de suporte forte* se $|L_v| > 1$.

Chamamos de *árvore* um grafo conexo acíciclo e uma *floresta* consiste em um grafo acíclico. O *grafo estrela* S_n é o grafo completo bipartido $K_{1,n}$, com $n \geq 2$. Um *grafo caterpillar* $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_n), n \geq 2$, é uma árvore obtida a partir de um caminho central $P_n = (c_1, c_2, ..., c_n)$ adicionando-se $k_i \geq 0$ folhas ao vértice c_i do caminho central, $1 \leq i \leq n$. O número de folhas de um grafo caterpillar é $f = \sum_{i=1}^{n} k_i$. Para evitar ambiguidade utilizaremos que $k_1 > 0$ e $k_n > 0$.

3 Resultados

Nosso primeiro resultado é sobre o número de intervalo P_3 para prismas complementares de grafos estrela.

Teorema 1. *Seja $G = S_n\overline{S_n}$. Então, $i_{P_3}(G) = n + 2$.*

Demonstração. Considere $u \in S_n$ tal que $d(u) = n$ e $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ sejam as folhas de S_n. Seja $S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \overline{u}, \overline{u_1}\}$.Vamos mostrar que $I[S] = V(G)$. Note que $|N(u) \cap S| \geq 2$. Logo, $u \in I[S]$. Como $u_i\overline{u_i}, \overline{u_i}\overline{u_1} \in E(G)$, para $2 \leq i \leq n$, temos que $V(\overline{S_n}) \subset I[S]$. Logo, $I[S] = V(G)$ e $i_{p_3}(G) \leq n + 2$.

Vamos construir um conjunto de intervalo mínimo. Como $d(\overline{u}) = 1$, devemos ter obrigatoriamente $\overline{u} \in S$. Assim, $|S| \geq 1$. Note que $d(u_i) = 2$, para $1 \leq i \leq n$. Assim, para que $I[S]$ seja $V(G)$, ou $u_i \in S$ ou $u \in S$ e $\overline{u_i} \in S$, $1 \leq i \leq n$.

Caso 1. $u_i \in S$, $1 \leq i \leq n$.

Seja $S = \{\overline{u}, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Note que $|S| = n + 1$. Veja que $I[S] = V(S_n) \cup \{\overline{u}\}$, e S não é um conjunto de intervalo. Logo, um conjunto de intervalo deve conter pelo menos um vértice $\overline{u_i}$, $1 \leq i \leq n$. Considere agora $S' = S \cup \{\overline{u_1}\}$. Como $\overline{u_1 u_i} \in E(G)$, $1 \leq i \leq n$ temos que $I[S'] = V(G)$.

Caso 2. $u \in S$ e $\overline{u_i} \in S$, para $1 \leq i \leq n$.

É fácil notar que $N(u_i) = \{\overline{u_i}, u\}$. Assim, $I[\{u, \overline{u}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_n}\}] = V(G)$.

Por fim, S poderia ser composto por alguns vértices $u_i \in S$, $1 \leq i \leq n$ e por alguns vértices $\overline{u_j} \in S$, $1 \leq j \leq n$. Neste caso, $|S| > n + 2$, pois se algum $u_i \notin S$, implica que u e $\overline{u}$ pertençam a S. □

Nosso próximo resultado apresenta um limite superior para prismas complementares de grafos caterpillar. Utilizaremos c para denotar a quantidade de vértices do caminho central do grafo caterpillar que possui no máximo uma folha adjacente.

Proposição 1. *Seja G um grafo caterpillar. Então, $i_{P_3}(G\overline{G}) \leq f + 2 + c$.*

Demonstração. Considere $V(G) = \{\mathcal{C} \cup \mathcal{F}\}$ no qual $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, .., f_m\}$ sejam as folhas e $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ sejam os vértices do caminho central.

Construiremos S, um conjunto de intervalo de cardinalidade $f + 2 + c$. Observe que com dois vértices de $\overline{\mathcal{F}}$, digamos u e v, temos que $\overline{\mathcal{F}} \subseteq I[u, v]$, pois $\overline{\mathcal{F}}$ é uma clique. Assim, acrescentamos $\overline{f_1}$ e $\overline{f_m}$ a S.

Observe que $I[\overline{f_1}, \overline{f_m}] = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{C}} \backslash \{\overline{c_j}, \overline{c_k}\}$, onde $\overline{c_j}$ e $\overline{c_k}$ são vértices tais que $c_j f_1, c_k f_m \in E(G)$. Para contaminar $\overline{c_j}$ e $\overline{c_k}$ de maneira eficiente, incluiremos c_j e c_k em S. Assim, $I[\{\overline{f_1}, \overline{f_m}, c_j, c_k\}] = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{C}} \cup \{f_1, f_m, c_i, c_k\}$. O restante dos vértices de $\mathcal{F}$ serão contaminados se: (a) $\mathcal{F} \backslash \{f_1, f_m\} \subseteq S$ ou (b) $\overline{\mathcal{F}} \cup \mathcal{C} \subseteq S$.

Sabemos que $|\mathcal{F} \backslash \{f_1, f_m\}| = m - 2$ e $|\overline{\mathcal{F}} \cup \mathcal{C}| = m + n$, e como desejamos um conjunto de intervalo com a menor cardinalidade possível, incluiremos $\mathcal{F} \backslash \{f_1, f_m\}$ em S, de modo que $S = \{\overline{f_1}, \overline{f_m}, c_j, c_k\} \cup [(\mathcal{F} \backslash \{f_1, f_m)\}]$. Consequentemente, $I[S] = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{C}} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C} \backslash C'$, onde C' é o conjunto de vértices do caminho central de G que possui no máximo uma folha.

Para contaminar os vértices de C' devemos incluí-los em S. Assim, S é um conjunto de intervalo P_3 tal que $|S| = 2 + 2 + (f - 2) + c$, onde f é o número de folhas de G e c é o número de vértices do caminho central de G com no máximo uma folha. Portanto $i_{P_3}(G\overline{G}) \leq f + 2 + c$. □

Colocando algumas restrições no grafo caterpillar, podemos estabelecer o valor exato do número de intervalo P_3.

Teorema 2. *Seja G um grafo caterpillar no qual $k_i \geq 2$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Então $i_{P_3}(G\overline{G}) = f + 2$.*

Demonstração. O limite superior para este caso pode ser obtido pela Proposição 1 ao observar que $c = 0$. Para verificar o limite inferior suponha, por contradição, que exista um conjunto S de $V(G\overline{G})$ de tamanho $f + 1$.

Como $d(v) = 2$ para todo $v \in F$, então ou $N(v) \subset S$, ou $v \in S$. Dessa forma, a disposição dos vértices em S se dividirá em alguns casos:

Caso 1. $\mathcal{F} \subseteq S$.

Como $|S| = f + 1$ e $\mathcal{F} \subseteq S$, devemos ter $S = \mathcal{F} \cup \{x\}$. Podemos ter $x \in \mathcal{C}$ ou $x \in \overline{\mathcal{C}}$ ou $x \in \overline{\mathcal{F}}$. Se $x \in \mathcal{C}$, então $I[S] = S \cup \mathcal{C}$ e S não é um conjunto de intervalo. Se $x \in \overline{\mathcal{C}}$, então $I[S] \cap (\overline{\mathcal{C}} \backslash \{x\}) = \emptyset$ e S não é um conjunto de intervalo. Por último, se $x \in \overline{\mathcal{F}}$, temos que $I[S] = S \cup \mathcal{C} \cup \overline{\mathcal{F}}$ e novamente S não é um conjunto de intervalo.

Caso 2. Dois vizinhos de cada vértice em $\mathcal{F}$ estão em S.

Os vértices em $\mathcal{C}$ e em $\overline{\mathcal{F}}$ devem estar em S. Então $|S| \geq |\overline{\mathcal{F}}| + |\mathcal{C}|$. Como $|\overline{\mathcal{F}}| = f$ e $|\mathcal{C}| = n \geq 2$, temos que $|S| \geq f + 2$, uma contradição.

Caso 3. Existem alguns vértices de F em S e vizinhos de outros vértices de F em S.

Como observado anteriormente, se um vértice $f_i \in \mathcal{F}$ não está em S então seus vizinhos, digamos u e v, devem estar em S para que $f_i \in I[S]$. Se pelo menos dois vértices de $\mathcal{F}$ não estão em S, então $|S| \geq f + 2$. Logo S contém pelos menos $f - 1$ vértices de $\mathcal{F}$. Pelo Caso 1 vamos considerar $S = \mathcal{F} \backslash f_i \cup \{u, v\}$ tal que $uf_i, vf_i \in E(G\overline{G})$. Note que $I[S] = \mathcal{F} \cup \mathcal{C} \cup \overline{\mathcal{F}}$ e S não é um conjunto de intervalo.

Como obtemos uma contradição em todos os casos, pode-se afirmar que $|S| \geq f + 2$. Portanto $i_{P_3}(G\overline{G}) = f + 2$. $\square$

Nosso objetivo agora é obter limites para o número de intervalo de prismas complementares de árvores. Agora vamos considerar f o número de folhas de uma árvore T. Iniciaremos com alguns resultados de [2] sobre o número de intervalo P_3 para árvores.

Teorema 3. *[2] Se T é uma árvore não trivial de ordem n então $i_{P_3}(T) \leq \frac{n+f}{2}$.*

Teorema 4. *[2] Seja G um grafo diferente de uma estrela. Seja u um vértice de suporte de G com apenas um vizinho que não seja folha e $G' = G - (L_u \cup \{u\})$. Então $i_{P_3}(G') \leq i_{P_3}(G) - |L_u|$. Se u for um vértice de suporte forte, então $i_{P_3}(G') = i_{P_3}(G) - |L_u|$.*

Lema 1. *Seja T uma árvore não trivial que não seja uma estrela. Então, existem no mínimo dois vértices de suporte em T com apenas um vizinho não pendente.*

Demonstração. Considere T uma árvore não trivial que não seja uma estrela. Considere T' a subárvore de T tal que $T' = T - F(T)$, onde $F(T)$ é o conjunto de folhas de T. Como T não é um grafo estrela, T' possui ao menos dois vértices e possui ao menos duas folhas, digamos u e v. Note que, essas duas folhas, u e v, não são folhas em T. Mas como u e v tem grau 1 em T', esses vértices são de suporte em T e possuem somente um vizinho não pendente em T, concluindo a prova. $\square$

Por fim, apresentamos um limite superior para o número de intervalo P_3 em prismas complementares de árvores gerais. Vamos denotar por $n(G)$ o número de vértices de um grafo G e por $f(G)$ o número de folhas de G.

Teorema 5. *Considere T uma árvore não trivial que não seja uma estrela. Então $i_{P_3}(T\overline{T}) \leq \frac{n(T)+f(T)}{2} + 2$.*

Demonstração. Considere v_i e v_j dois vértices de suporte de T com apenas um vizinho não pendente. Esses vértices existem devido ao Lema 1. Sejam f_i e f_j folhas de T adjacentes, respectivamente, a v_i e v_j.

Vamos construir um conjunto de intervalo P_3. Quaisquer dois vértices de $\overline{T}$ não formam um conjunto de intervalo de $\overline{T}$. Porém, $I[\overline{f}_i, \overline{f}_j] = V(\overline{T})\backslash\{\overline{v_i}, \overline{v_j}\}$. Dessa forma, adicione $\overline{f}_i$ e $\overline{f}_j$ a S. Como $|N(f_i) \cap \overline{T}| = |N(f_j) \cap \overline{T}| = 1$, vamos acrescentar v_i e v_j a S.

Note que $I[v_i, \overline{f_i}] = f_i$. O restante das folhas do vértice de suporte v_i, caso existam, não pertencem a $I[\{\overline{f}_i, \overline{f}_j, v_i, v_j\}]$. Por esta razão as folhas $L_{v_i}\backslash\{f_i\}$ serão acrescentadas a S. De forma análoga, acrescentamos $L_{v_j}\backslash\{f_j\}$ a S. Observe que até este momento a cardinalidade de $|S|$ é igual a $|L_{v_i}| + |L_{v_j}| + 2$.

Seja T'' o subgrafo induzido de T tal que $T'' = T - (L_{v_i} \cup \{v_i\} \cup L_{v_j} \cup \{v_j\})$. Note que $I[\{\overline{f_i}, \overline{f}_j, v_i, v_j\} \cup (L_{v_i} \setminus \{f_i\}) \cup (L_{v_j} \setminus \{f_j\})] = V(T\overline{T})\backslash V(T'')$. Então, podemos afirmar que $i_{P_3}(T\overline{T}) = i_{P_3}(T'') + |L_{v_i}| + |L_{v_j}| + 2$.

Pelo Teorema 4, temos que $i_{P_3}(T'') \leq i_{P_3}(T) - |L_{v_i}| - |L_{v_j}|$. Portanto $i_{P_3}(T\overline{T}) \leq i_{P_3}(T) - |L_{v_i}| - |L_{v_j}| + |L_{v_i}| + |L_{v_j}| + 2 = i_{P_3}(T) + 2$.

Por fim, segundo o Teorema 3, $i_{P_3}(T) \leq \frac{n(T)+f(T)}{2}$ e portanto $i_{P_3}(T\overline{T}) \leq \frac{n(T)+f(T)}{2} + 2$. □

Referências

[1] Blidia, M.; Chellali, M.; Favaron, O. *Independence and 2-domination in trees.* Australasian Journal of Combinatorics, 33 (2005) 317–327.

[2] Bollobás, B., *The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis*, Cambridge - UK, Cambridge University Press, 2006.

[3] Bresar, B.; Klavzar S.; Horvat, A. T.. *On the geodetic number and related metric sets in cartesian product graphs.* Discrete Mathematics, 308 (2008), 5555–5561.

[4] Campos, V.; Sampaio, R. ; Silva, A. ; Szwarcfiter, J. L.. *Graphs with few P4s under the convexity of paths of order three.* Discrete Applied Mathematics, 192 (2015), 28–39.

[5] Castonguay, D.; Coelho, E. M.M.; Coelho, H.; Nascimento, J. R.. *On the geodetic number of complementary prisms.* Information Processing Letters, 144 (2019), 39–42.

[6] Coelho, E. M. M.; Coelho, H.; Nascimento, J. R.; Szwarcfiter, J. L.. *On the P3-Hull Number of some Products of Graphs.* Discrete Applied Mathematics, 253 (2019), 2–13.

[7] Centeno, C.C.; Dourado, M.C.; Szwarcfiter, J.L.. *On the Convexity of Paths of Length Two in Undirected Graphs.* Eletronic Notes in Discrete Mathematics, 32 (2009), 15–18.

[8] Dreyer, P. A.; Roberts, F. S. *Irreversible k-threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion*, Discrete Applied Mathematics, 157 (2009), 1615–1627.

[9] Duarte, M. A.; Duarte, P., L. Penso, Rautenbach, D.; Souza, U. dos S. *Complexity properties of complementary prisms.* Journal of Combinatorial Optimization, (2015), 1–8.

Erika M. M. Coelho
Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás
Goiânia, Goiás, Brasil
erikamorais@inf.ufg.br

Cristine Cardoso Costa
Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás
Goiânia, Goiás, Brasil
cris.crdsc@gmail.com