Matemática Contemporânea, Vol. 1, 83–87
http://doi.org/10.21711/231766361991/rmc111
©1991, Sociedade Brasileira de Matemática

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES GEODESIQUES AUX BOUTS D'UNE COURBE ALGEBRIQUE COMPLEXE DE $\mathbf{C}^2$

Nelson E. Simões Silva

Soit Γ une courbe algébrique complexe de $\mathbf{C}^2$ et $\bar{\Gamma}$ son adhérence dans l'espace projectif $\mathbf{CP}_2 = \mathbf{C}^2 \cup \mathbf{P}_\infty$. Au voisinage de tout point régulier, la courbe Γ munie de la métrique induite par la métrique euclidienne de $\mathbf{C}^2$ est une surface de courbure négative. Comme Γ rencontre la droite projective de l'infini $\mathbf{P}_\infty$ en un nombre fini de points et que localement en chacun de ces points la courbe $\overline{\Gamma}$ admet un nombre fini de branches, Γ a un nombre fini de bouts (voir [Wa]).

Le but de ce travail est d'étudier les géodésiques de Γ qui "vont à l'infini".

La position des branches de $\overline{\Gamma}$ passant par les points à l'infini de Γ se traduit géométriquement:

cas 1: Si la branche est transverse à $\mathbf{P}_\infty$, il lui correspond un bout de Γ qui admet pour asymptote la droite complexe trace sur $\mathbf{C}^2$ de la droite projective tangente au point à l'infini de la branche considérée.

cas 2: Si la branche est tangente à $\mathbf{P}_\infty$ en son point à l'infini il lui correspond un bout qui n'admet pas d'asymptote mais seulement une direction asymptotique.

Théorème *Les seuls comportements possibles de rayons géodésiques allant à l'infini sont:*

cas 1: *Le bout du rayon géodésique est contenu dans un bout de Γ transverse à $\mathbf{P}_\infty$ et la géodésique admet une asymptote;*

cas 2: *Le bout du rayon est contenu dans un bout de Γ tangent à $\mathbf{P}_\infty$ et le rayon géodésique admet seulement une direction asymptotique.*

Remarquons d'abord que les intersections des bouts avec des sphères de grand rayon sont, puisque le bout admet une direction asymptotique et, comme nous le verrons plus bas, a une seconde forme fondamentale dont la norme tend vers 0 à l'infini, de courbure géodésique sur Γ positive. Un rayon géodésique ne peut donc traverser une de ces intersections en allant vers le bout plus d'une fois puisque la surface Γ est de courbure négative . Comme il ne peut non plus spiraler vers une de ces intersections, un rayon qui s'éloigne assez loin dans un bout de Γ doit aller à l'infini dans ce bout.

Remarque Hadamard déduit de l'application du théoreme de Gauss-Bonnet que nous venons de rappeler des propriétés fines des rayons géodésiques sur une surface complète de courbure négative [Ha].

Pour montrer qu'un rayon géodésique ne peut aller à l'infini que de la manière décrite ci-dessus nous allons estimer sa courbure (comme courbe de $\mathbf{C}^2$) en un point $z \in \Gamma$ en fonction de la courbure de Gauss de Γ en z, puis étudier la manière dont cette courbure de Gauss tend vers 0 lorsque z s'éloigne sur un bout de Γ en utilisant la paramétrisation de Puiseux de la branche de $\overline{\Gamma}$ correspondante.

Remarquons d'abord que les courbes holomorphes de $\mathbf{C}^2$ sont des surfaces minimales de $\mathbf{C}^2$ très particulières. Plus précisement, soit z un point régulier de la courbe holomorphe Γ et N un vecteur unitaire normal en z à Γ. Considérons la projection orthogonale $p_{z,N}$ sur l'espace de dimension réelle 3:

$$E(z,N) = T_z\Gamma \oplus \mathbf{R}.N.$$

Proposition *La surface $p_{z,N}(\Gamma)$ est régulière en z et*

a) La courbure moyenne en z de $p_{z,N}(\Gamma)$ est nulle.

b) La courbure de Gauss en z de $p_{z,N}(\Gamma)$ ne dépend pas de N.

Remarques: Cette courbure $K(z)$ est, à une constante universelle près, le jacobien en z de l'application de Gauss complexe:

$$\begin{aligned}\nu_{\mathbf{C}} \ : \ \Gamma &\longrightarrow \mathbf{CP}_1 \\ z &\longmapsto \nu(z)\end{aligned}$$

où $\nu(z)$ est la droite complexe normale en z à Γ. C'est aussi, encore à une constante universelle près, la courbure de Gauss de Γ en z. Voir [La_1] et [La_2].

Soit maintenant γ une géodésique de Γ passant par le point régulier z. Si la courbure $k(z)$ de γ en z (γ est vue comme une courbe de $\mathbf{C}^2$) n'est pas nulle, sa normale principale $N(\gamma)$ est bien définie et la courbure en z de la courbe $p_{z,N(\gamma)}(\gamma)$ de $E(N(\gamma))$ est égale à $k(z)$.

Nous laissons le lecteur vérifier que la courbure géodésique en z sur la surface $p_{z,N(\gamma)}(\Gamma)$ de la courbe $p_{z,N(\gamma)}(\gamma)$ est nulle. La courbure $k(z)$ est donc une courbure normale en z de la surface $p_{z,N(\gamma)}(\Gamma)$. On a donc:

$$k_1 \leq k(z) \leq k_2$$

où k_1 et k_2 sont les courbures principales en z de la surface $p_{z,N(\gamma)}(\Gamma)$. Nous avons vu que $k_1 + k_2 = 0$ tandis que $K = k_1 k_2$. On en déduit:

$$| k(z) | \leq \sqrt{| K(z) |}$$

Lemme *Soit Γ_i un bout de Γ correspondant à la branche $\overline{\Gamma_i}$ d'un point à l'infini x de la courbe algébrique Γ.*

a) La courbure $K(z)$ des points du bout Γ_i satisfait, pour un $\varepsilon > 0$ convenable et lorsque $| z |$ est assez grand:

$$| K(z) | \leq \frac{1}{| z |^{2+\varepsilon}}$$

b) Si de plus $\overline{\Gamma_i}$ est transverse à $\mathbf{P}_\infty$ en x on a dans les mêmes conditions:

$$| K(z) | \leq \frac{1}{| z |^{4+\varepsilon}}$$

Ce lemme se démontre en écrivant le développement de Puiseux de $\overline{\Gamma_i}$ en x (voir [Wa]), puis en calculant explicitement à l'aide de ce développement le jacobien de l'application de Gauss complexe.

Remarquons maintenant que si la courbure d'une courbe γ d'un espace euclidien paramétrée par sa longueur d'arc $s, s \in [0, +\infty)$, satisfait:

$$k(\gamma(s)) \leq fracC_1R^\alpha \quad ; C_1 > 0,\ \alpha > 1$$

où $R = \| \gamma(s) \|$, R et s sont équivalents quand R, et donc s, tendent vers l'infini. On a donc, quitte à remplacer C_1 par une constante $C > 0$ plus petite:

$$k(\gamma(s)) \leq \frac{C}{s^\alpha}$$

Proposition

a) Si une courbe γ de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ paramétrée par sa longueur d'arc $s, s \in [0, +\infty)$, satisfait:

$$k(\gamma(s)) \leq \frac{C}{s^{1+\epsilon}}$$

cette courbe admet une direction asymptotique;

b) si de plus on a:

$$k(\gamma(s)) \leq \frac{C}{s^{2+\epsilon}}$$

la courbe admet une asymptote.

Demonstration: Montrons que la famille des vecteures tangents $\gamma(s)$ est de Cauchy quand s tend vers l'infini. On a si $s \leq t$:

$$\| \gamma(s) - \gamma(t) \| \leq \int_s^t k(\gamma(s)) \leq \int_s^\infty k(\gamma(s)) \leq \frac{C_2}{s^\epsilon}$$

Le vecteur $\gamma(s)$ a donc une limite v_0, qui détermine la direction asymptotique, quand s tend vers l'infini.

Dans le cas b) on a de plus:

$$\| \gamma(s) - v_0 \| \leq \frac{C_3}{s^{1+\epsilon}}$$

ce qui permet de montrer que la projection de $\gamma(s)$ sur le plan orthogonal à v_0 est aussi de Cauchy, donc converge vers un point m_o. Ceci implique que la courbe γ admet pour asymptote la parallèle à v_0 passant par m_0.

Cette dernière proposition permet de déduire du lemme notre théorème.

Le même type de résultat est vrai pour les rayons géodésiques allant à l'infini sur une surface minimale complète de $\mathbf{R}^3$ de courbure totale finie.

L'auteur remercie R. Langevin pour les questions qui ont suscité ce travail et de fructueuses discussions.

Bibliographie

[Ha] J. Hadamard *Les surfaces de courbure opposées et leur lignes géodésiques.* Jornal de Mathematiques pures et appliquees. 5° série, t4 p 27-73 (1898).

[La_1] R. Langevin *Courbure, feuilletages et surfaces (mesure et distribution de Gauss) Thèse d'Etat.* Publication Mathematiques d'Orsay (1980)

[La_2] R. Langevin *Geometry of algebraic curves, hypersurfaces, singularities and foliations.* preprint

[Wa] R. J. Walker. *Algebraic curves* Princeton University Press (1950) ou Dover (New York).

Universidade Federal do Ceará
Departamento de Matemática
Campus do Pici
60115 Fortaleza - CE