

O problema da partição em cliques-dominantes

H. V. e Sousa

C. N. Campos

Resumo

Dado um grafo G , uma partição em cliques-dominantes (PCD) é uma partição de $V(G)$ tal que cada uma de suas partes seja um conjunto clique-dominante. O problema da partição em cliques-dominantes consiste em determinar

$$d_{cl}(G) = \max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ é uma PCD de } G\}.$$

Neste trabalho, este problema é apresentado e estudado para a classe dos grafos bipartidos, a classe dos produtos cartesianos, a classe dos produtos diretos de grafos completos, e a classe das potências de ciclos.

1 Introdução

Seja G um grafo com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. O conjunto $S \subseteq V(G)$ é uma *clique* se os seus vértices são dois a dois adjacentes. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é denominado um *conjunto dominante* do grafo G , se para todo vértice $v \in V(G)$, ou v é um elemento de S , ou v é adjacente a um elemento de S . O *número de dominação*

2000 AMS Subject Classification: 05C69.

Key Words and Phrases: cliques-dominantes, partição dominante.

Financiado pela Capes e pelo CNPq.

de G , $\gamma(G)$, é a cardinalidade de um menor conjunto dominante de G . O *problema do conjunto dominante mínimo* consiste em determinar $\gamma(G)$ para um grafo G arbitrário. Este problema foi demonstrado ser NP-difícil em 1979, por M. Garey e D. Johnson [GJ79].

O estudo formal dos conjuntos dominantes se iniciou por volta de 1960 [Ore62], embora problemas relacionados a eles tenham sido estudados anteriormente [Jae62]. Muitas aplicações reais podem ser modeladas como problemas de conjuntos dominantes. Algumas destas aplicações levaram à definição de variantes do problema do conjunto dominante mínimo original. Uma variante, particularmente importante para este trabalho, consiste em adicionar a restrição de que o conjunto dominante seja uma clique (*conjunto clique-dominante*), definindo o *problema da clique-dominante*. Em analogia a $\gamma(G)$, o valor $\gamma_{cl}(G)$ é a cardinalidade de um menor conjunto clique-dominante em G . Convém observar que $\gamma_{cl}(G)$ não está definido para todos os grafos. Por exemplo, um ciclo com cinco vértices não possui conjuntos cliques-dominantes.

Em 1977, em um artigo com grande impacto na popularização do problema do conjunto dominante, E. J. Cockayne e S. T. Hedetniemi [CH77] introduziram uma nova variante do problema do conjunto dominante. Uma *partição dominante* é uma partição de $V(G)$, tal que cada uma de suas partes seja um conjunto dominante de G . Define-se o *número domático*¹, $d(G)$, como $\max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ é uma partição dominante de } G\}$. Note que $d(G)$ está sempre bem definido, pois todo grafo possui uma partição dominante com uma única parte igual a $V(G)$. Este problema tem atraído atenção de vários pesquisadores e muitos resultados têm aparecido na literatura [Ber88, KS94, RV98, Vol11].

Uma extensão natural deste problema consiste em considerar partições de $V(G)$ em conjuntos dominantes com restrições adicionais [HHS98, Zel92]. Neste contexto, uma *partição em cliques-dominantes (PCD)* é uma partição de $V(G)$ em conjuntos cliques-dominantes. O *número clique-domático*, $d_{cl}(G)$, é definido como $\max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ é uma PCD}\}$. Este trabalho aborda

¹Em inglês, denominado *domatic number*.

o problema de determinar $d_{cl}(G)$ para algumas classes de grafos.

2 Resultados Principais

É uma observação simples o fato de que um grafo completo com n vértices, K_n , possui uma PCD com n partes unitárias. Logo, $d_{cl}(K_n) = n$. Já para um grafo bipartido completo, $K_{m,n}$, cujas partes possuem cardinalidade m e n , uma partição em cliques-dominantes nem sempre existe. Por exemplo, o grafo $K_{2,3}$ não possui uma partição em cliques-dominantes. O teorema a seguir caracteriza os grafos bipartidos que possuem uma PCD.

Teorema 2.1. Seja G um grafo bipartido. O grafo G possui uma PCD se e somente se $G \cong K_{n,n}$. Ademais, $d_{cl}(K_{n,n}) = n$, para $n \geq 2$. ■

O *produto cartesiano* de dois grafos simples G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \square G_2$, que possui $V(G_1) \times V(G_2)$ como conjunto de vértices e, dois vértices (u, v) e (x, y) adjacentes se e somente se, ou $u = x$ e $\{v, y\} \in E(G_2)$, ou $\{u, x\} \in E(G_1)$ e $v = y$. Os grafos obtidos pelo produto cartesiano de dois grafos possuem uma estrutura bem comportada, que associada às exigências de uma partição em conjuntos cliques-dominantes levou a obtenção de uma caracterização dos grafos resultantes de produtos cartesianos que admitem uma PCD.

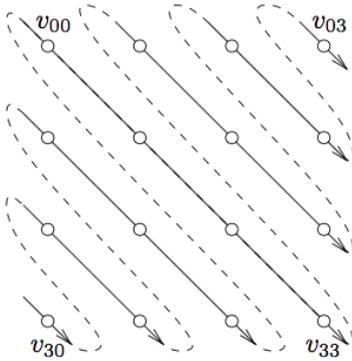
Teorema 2.2. Seja G o grafo obtido pelo produto cartesiano dos grafos G_1 e G_2 , com $|V(G_1)| \geq 2$ e $|V(G_2)| \geq 2$. O grafo G possui uma partição em cliques-dominantes se e somente se $G_1 \cong K_p$ e $G_2 \cong K_q$. Ademais, $d_{cl}(K_p \square K_q) = \max\{p, q\}$. ■

O *produto direto* de dois grafos simples G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \times G_2$, que também possui conjunto de vértices $V(G_1) \times V(G_2)$, com dois vértices (u, v) e (x, y) adjacentes se e somente se $\{u, x\} \in E(G_1)$ e $\{v, y\} \in E(G_2)$. O Teorema 2.3 estabelece o número clique-domático para o produto direto de dois grafos completos com pelo menos três vértices.

Teorema 2.3. Seja $G \cong K_p \times K_q$, $p \geq 3$, $q \geq 3$. Então, $d_{cl}(G) = \lfloor \frac{pq}{3} \rfloor$.

Esboço da Demonstração. Considere G como estabelecido na hipótese. Inicialmente, mostramos que um conjunto clique-dominante de G precisa ter cardinalidade pelo menos três. Em seguida, construímos uma partição em cliques-dominantes para G , com cardinalidade $\lfloor \frac{pq}{3} \rfloor$. A construção dessa partição depende do valor $pq \pmod 3$.

Sejam $G_1 \cong K_p$, com $V(G_1) = \{u_0, \dots, u_{p-1}\}$ e $G_2 \cong K_q$, com $V(G_2) = \{w_0, \dots, w_{q-1}\}$. Considere $G = G_1 \times G_2$ e denote v_{ij} o vértice (u_i, w_j) de $V(G)$. Vamos construir uma *rotulação canônica* dos vértices de $V(G)$ dispendo-os em formato matricial, seguindo as suas diagonais, conforme ilustra a Figura 1(a). A Figura 1(b) exibe a rotulação final para este exemplo, que inclui a troca dos rótulos dos vértices com rótulo 1 e pq .



(a) Ordem a ser seguida para construir a rotulação.

7	11	14	1
○	○	○	○
4	8	12	15
○	○	○	○
2	5	9	13
○	○	○	○
16	3	6	10
○	○	○	○

(b) Rotulação final.

Figura 1: Exemplo de rotulação canônica do grafo $K_4 \times K_4$.

Utilizando a rotulação canônica, construímos $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{\frac{pq}{3}}\}$ tal que $P_i = \{3(i-1) + 1, 3(i-1) + 2, 3i\}$, $1 \leq i \leq \frac{pq}{3}$, quando $pq \equiv 0 \pmod 3$. Para os casos em que $pq \equiv l \pmod 3$, $l \in \{1, 2\}$, a construção é similar, mas exige l partes de cardinalidade quatro. Estas são formadas pelos vértices de uma diagonal com quatro vértices, tal como a composta pelos vértices 7, 8, 9 e 10 na Figura 1(b). Mostramos que sempre existem l destas diagonais e que estas são cliques-dominantes. ■

Seja C_n um grafo ciclo com $V(C_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Para $v_i, v_j \in V(C_n)$ definimos $d_{C_n}(v_i, v_j)$ como o menor número de arestas em um caminho entre v_i e v_j no C_n . A k -ésima potência do C_n é o grafo C_n^k , com conjunto de vértices $V(C_n^k) = V(C_n)$ e conjunto de arestas $E(G) = E^1 \cup \dots \cup E^k$, tal que $E^l = \{\{v_i, v_j\} : d_{C_n}(v_i, v_j) = l\}$. Note que $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Dizemos que uma aresta $e \in E^l$ possui *alcance* l . Observe que, considerando esta definição de potências de ciclos, os grafos desta classe são sempre simples. Além disso, quando $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $C_n^k \cong K_n$ e $d_{cl}(K_n) = n$.

Para determinar o número clique-domático das potências de ciclos estabelecemos condições suficientes para que um determinado conjunto de dois vértices seja uma clique-dominante, conforme explicita o Lema 2.1.

Lema 2.1. Seja $G \cong C_n^k$, com $n \leq 3k + 1$, $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $d = 3k + 1 - n$. Então, $S = \{v_i, v_{i+l}\}$ com $k - d \leq l \leq k$ é uma clique-dominante em G . ■

O Teorema 2.4 caracteriza as potências de ciclos que possuem uma PCD e estabelece o valor de $d_{cl}(C_n^k)$ para estes casos.

Teorema 2.4. Seja $G \cong C_n^k$. O grafo G possui pelo menos uma PCD se e somente se $k \geq \frac{n-1}{3}$. Ademais, $d_{cl}(C_n^k) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, para $\frac{n-1}{3} \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Esboço da Demonstração. Inicialmente, as cliques de G são particionadas em dois tipos: *cliques internas* e *cliques externas*. A seguir, mostramos que quando $k < (n - 1)/3$, G não possui cliques externas e as cliques internas não são conjuntos dominantes. Supomos, então, $k \geq (n - 1)/3$.

Se $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então G é isomorfo a um grafo completo, cujo número clique-domático é conhecido. Suponha $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Nas potências de ciclos, $\Delta(G) = 2k$. Caso n seja par, temos $k \leq \frac{n}{2} - 1$; então, $\Delta(G) \leq n - 2$. Caso n seja ímpar, temos $k \leq \frac{n-1}{2} - 1$; então, $\Delta(G) \leq n - 3$. Em ambos os casos, não temos vértices universais em G . Logo, uma clique-dominante em G possui pelo menos dois vértices. Isto implica, $d_{cl}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Vamos construir uma PCD, \mathcal{P} , com este número de partes.

Por hipótese, $\frac{n-1}{3} \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Isto implica que $2k + 2 \leq n \leq 3k + 1$. Particione $V(G)$ em três blocos, B^1, B^2, B^3 , tais que $B^1 = \{v_0, \dots, v_{k-1}\}$,

$B^2 = \{v_k, \dots, v_{2k-1}\}$ e $B^3 = \{v_{2k}, \dots, v_{n-1}\}$. Note que, $|B^1| = |B^2| = k$ e $2 \leq |B^3| \leq k + 1$. Denote u_j^i o j -ésimo vértice do i -ésimo bloco. Dizemos que u_j^i é um *vértice ímpar* (*par*) se j é ímpar (par). A Figura 2 exemplifica estes conceitos.

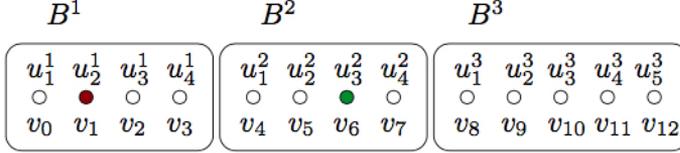


Figura 2: Partição em blocos do C_{13}^4 . Nesta partição, o vértice $v_1 = u_2^1$ é um vértice par e o vértice $v_6 = u_3^2$ é um vértice ímpar.

A construção de \mathcal{P} prossegue em casos, dependendo da cardinalidade de B^3 . Neste esboço, vamos mostrar a construção do caso em que $|B^3| = k$. Para os outros casos, são necessárias algumas adaptações, mas para todos eles, o Lema 2.1 tem um papel fundamental.

Caso 1. $|B^3| = k$. Neste caso, $\mathcal{P} = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$, definidas a seguir:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \{\{u_i^1, u_i^2\} : 2 \leq i \leq 2 \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor \text{ e } i \text{ par}\}; \\
 P_2 &= \{\{u_i^2, u_i^3\} : 1 \leq i \leq k \text{ e } i \text{ ímpar}\}; \\
 P_3 &= \{\{u_{i-1}^1, u_i^3\} : 2 \leq i \leq k \text{ e } i \text{ par}\}; \\
 P_4 &= \begin{cases} \{\{u_{k-1}^1, u_k^1, u_{k-1}^2\}\}, & \text{se } k \text{ é ímpar;} \\ \{\{u_k^1, u_k^2\}\}, & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

As Figuras 3 e 4 exemplificam \mathcal{P} para diferentes paridades de k .

Pelo Lema 2.1, os elementos de P_1 , P_2 , P_3 e P_4 (no caso em que k é par) são cliques dominantes de G . O alcance das arestas nas cliques de P_1 e P_2 é sempre k . Para as cliques de P_3 e de P_4 no caso par, o alcance é $k - 1$. Considere P_4 , com k ímpar. Pelo Lema 2.1, $\{u_{k-1}^1, u_{k-1}^2\}$ é clique-dominante em G . Além disso, u_k^1 é adjacente a ambos u_{k-1}^1 e u_{k-1}^2 . Portanto, $\{u_{k-1}^1, u_k^1, u_{k-1}^2\}$ é clique-dominante em G . Resta verificar que

\mathcal{P} é uma partição de $V(G)$.

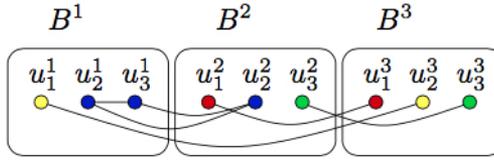


Figura 3: Grafo C_9^3 . Partição $\mathcal{P} = \{\{u_1^1, u_2^3\}, \{u_2^1, u_3^1, u_2^2\}, \{u_1^2, u_1^3\}, \{u_3^2, u_3^3\}\}$ exemplificando o caso em que k é ímpar.

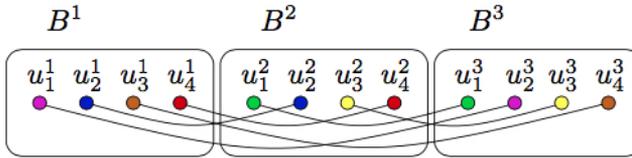


Figura 4: Grafo C_{12}^4 . Partição $\mathcal{P} = \{\{u_1^1, u_2^3\}, \{u_2^1, u_2^2\}, \{u_3^1, u_3^3\}, \{u_4^1, u_4^2\}, \{u_1^2, u_1^3\}, \{u_3^2, u_3^3\}\}$ exemplificando o caso em que k é par.

Vértices de B^1 : O vértice u_k^1 pertence a um único elemento de P_4 . Se k for ímpar, então u_{k-1}^1 também pertence ao único conjunto de P_4 . Os demais vértices pares de B^1 estão em elementos de P_1 , cada um deles pertencendo a um único conjunto. Similarmente, os elementos ímpares, excetuando-se u_k^1 , k ímpar, pertencem a conjuntos de P_1 .

Vértices de B^2 : Cada vértice ímpar de B^2 pertence a um único elemento de P_2 . No caso em que k é par, o vértice u_k^2 pertence a apenas um elemento de P_4 e cada um dos demais vértices pares pertence a apenas uma parte de P_1 . Caso k seja ímpar, o vértice u_{k-1}^2 é um elemento da única parte de P_4 e cada um dos vértices pares restantes pertence a uma única parte de P_1 .

Vértices de B^3 : Cada vértice ímpar de B^3 pertence a um único elemento de P_2 e cada vértice par de B^3 pertence a um único elemento de P_1 . ■

3 Conclusão

Neste trabalho, abordamos o problema da partição em cliques-dominantes para algumas classes de grafos. Em particular, foi considerada a classe das potências de ciclos. Uma extensão deste trabalho, em andamento, é a caracterização das potências de caminhos que possuem partições em cliques-dominantes.

Embora nem todas as classes de grafos possuam partições em cliques-dominantes, ou mesmo cliques-dominantes, identificar para quais classes elas existem e podem ser caracterizadas é um problema atraente, que revela propriedades estruturais importantes das classes consideradas.

Referências

- [Ber88] Alan A. Bertossi, *On the domatic number of interval graphs*, Inform. Process. Lett. **28** (1988), no. 6, 275–280. [MR 963513](#)
- [CH77] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks **7** (1977), no. 3, 247–261. [MR 483788](#)
- [GJ79] Michael R. Garey and David S. Johnson, *Computers and intractability*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979, A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences. [MR 519066](#)
- [HHS98] T. W. Haynes, S. Hedetniemi, , and P. Slater, *Domination in graphs*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 209, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998, Advanced topics, Edited by Teresa W. Haynes, Stephen T. Hedetniemi and Peter J. Slater. [MR 1605685](#)
- [Jae62] C.F. Jaenisch, *Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs, précédé d'une introduction à l'usage des lecteurs soit étrangers aux échecs, soit peu versés dans l'analyse*, vol. 1-3, Dufour et cie, Saint Petersburg, 1862.

- [KS94] Haim Kaplan and Ron Shamir, *The domatic number problem on some perfect graph families*, Inform. Process. Lett. **49** (1994), no. 1, 51–56. [MR 1264925](#)
- [Ore62] Oystein Ore, *Theory of graphs*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXVIII, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962. [MR 0150753](#)
- [RV98] Dieter Rautenbach and Lutz Volkmann, *The domatic number of block-cactus graphs*, Discrete Math. **187** (1998), no. 1-3, 185–193. [MR 1630712](#)
- [Vol11] Lutz Volkmann, *Upper bounds on the signed total domatic number of graphs*, Discrete Appl. Math. **159** (2011), no. 8, 832–837. [MR 2782641](#)
- [Zel92] Bohdan Zelinka, *Domatic number of a graph and its variants (extended abstract)*, Fourth Czechoslovakian Symposium on Combinatorics, Graphs and Complexity (Jaroslav Nešetřil and Miroslav Fiedler, eds.), Annals of Discrete Mathematics, vol. 51, Elsevier, 1992, pp. 363–369.

H. V. e Sousa
Instituto de Computação -
Unicamp
Campinas - Brasil
ra142690@ic.unicamp.br

C. N. Campos
Instituto de Computação -
Unicamp
Campinas - Brasil
campos@ic.unicamp.br