Matemática Contemporânea, Vol. 44, 1–10

O Número de Helly Geodético em Convexidades

Moisés Teles Carvalho Junior **Mitre Costa Dourado**
Jayme Luiz Szwarcfiter

Resumo

Um conjunto de vértices S de um grafo G é geodesicamente convexo se os vértices de todo caminho mínimo entre vértices de S pertencem a S. O número de Helly é o menor inteiro k para o qual toda família k-intersectante $\mathcal{C}$ de conjuntos convexos de G possui um vértice comum aos conjuntos de $\mathcal{C}$. Determinamos o número de Helly para árvores, d-grades completas, ciclos, completos e k-partidos completos. Apresentamos também dois limitantes inferiores.

1 Introdução

Dado um conjunto finito V, uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de V é dita uma *convexidade* em V quando o conjunto vazio e o conjunto V pertencem a $\mathcal{C}$, quando é fechada por interseção e a união de uma cadeia de elementos ordenada por inclusão de $\mathcal{C}$ está em $\mathcal{C}$. Os subconjuntos de $\mathcal{C}$ são ditos convexos. O menor conjunto convexo contendo $X \subseteq V$ é denominado envoltória ou fecho convexo de X [vdV93]. Para convexidades finitas, ser

2000 AMS Subject Classification: 05C12.
Key Words and Phrases: convexidade, convexidade geodética, Número de Helly.
Apoiado por CAPES e CNPq/Agências de fomento de pesquisa.

fechada por união o resultado é o último elemento, ou seja, tal condição é satisfeita [Duc88, DGK+09].

Utilizamos o conceito de convexidades em grafos. Existem diversas convexidades, como a de caminhos de tamanho três e a de caminhos induzidos. Encontra aplicações nas redes sociais, marketing e computação distribuída. O foco deste trabalho foi a convexidade *geodética* [DRdSS13].

A *distância* $d(u, v)$ entre dois vértices u, $v \in G$ é o comprimento de um caminho mínimo entre u e v em G. Uma *geodésica* entre u e v é um caminho mínimo entre u e v. Nesta convexidade, dados um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, um conjunto S é dito *convexo* se, para quaisquer dois vértices em S, todos os caminhos mínimos entre esses dois vértices estão em S. O *intervalo fechado* entre dois vértices u e v é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a alguma geodésica entre u e v. Se $S \subseteq V(G)$, então $I[S] = \bigcup\limits_{u,v \in S} I[u, v]$. Podemos definir também conjunto convexo utilizando o conceito de intervalo: Dados um grafo G e $S \subseteq V(G)$, então S é dito convexo em G se $I[S] = S$.

Estudamos o parâmetro conhecido por *número de Helly* [DPS09, Duc08] no contexto da convexidade geodética. Tem esse nome graças ao teorema do matemático Eduard Helly [Hel23], que diz que em um espaço euclidiano d-dimensional, se em uma coleção finita de $n > d$ conjuntos convexos, qualquer $d + 1$ conjuntos têm um elemento em comum, então existe ao menos um elemento em comum em todos os conjuntos. Tal teorema originou a propriedade de Helly, que diz que uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um conjunto atende a *propriedade de Helly* se, para toda subfamília formada por subconjuntos dois a dois intersectantes, então existe um elemento comum a todos os subconjuntos. A propriedade possui aplicações em otimização em problemas de localização, na computação em biologia computacional e processamento de imagens. Trataremos a família de conjuntos convexos como um hipergrafo e seus conjuntos convexos como hiperarestas [DPS09, Ber73].

Um *hipergrafo* $\mathcal{H}$ é um par ordenado $(V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$, onde $V(\mathcal{H}) = \{v_1, ..., v_n\}$, com $n < \infty$, e $E(\mathcal{H}) = \{E_1, ..., E_m\}$, onde $E_i \subseteq V(\mathcal{H})$, para $i = 1, 2, ..., m$. Os elementos de $V(\mathcal{H})$ são os vértices do hipergrafo e os conjuntos $E_1, E_2, ..., E_m$ são chamadas hiperarestas, onde $V(\mathcal{H}) = \bigcup_{E_i \in E(\mathcal{H})} E_i$. O *núcleo* de $\mathcal{H}$ é definido como *núcleo*$(\mathcal{H}) = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_m$. Um hipergrafo é dito k-$uniforme$ se todas suas as hiperarestas possuem exatamente k vértices, assim todo grafo G é um hipergrafo $\mathcal{H}$ 2-$uniforme$. Um conjunto S é um q-*conjunto* se $|S| = q$, S é um q^--*conjunto* se $|S| \leq q$ e S é um q^+-*conjunto* se $|S| \geq q$. Um hipergrafo $\mathcal{H}'$ é um *hipergrafo parcial* de $\mathcal{H}$ se $E(\mathcal{H}') \subseteq E(\mathcal{H})$. Um hipergrafo $\mathcal{H}$ é dito p-*intersectante* se todo p^--hipergrafo parcial de $\mathcal{H}$ possui núcleo não vazio.

Nosso foco é definir para algumas classes de grafos o número de Helly, cuja definição é uma extensão do conceito da propriedade, ou seja, o menor número inteiro k tal que para toda subfamília k-intersectante, o núcleo é não vazio. Assim, dizemos que o grafo é k-*Helly*. Em particular, quando $k = 2$ dizemos que a família atende à propriedade de Helly. Se uma família $\mathcal{C}$ for k-Helly, será também p-Helly para $k < p$.

Dada uma família de conjuntos convexos na convexidade geodética, que por ser uma família de subconjuntos dos vértices de um grafo, é um hipergrafo, estudamos então para quais classes, ou características, o grafo atende ou não à propriedade de Helly, ou para qual número inteiro p esta família atende a propriedade. O teorema sobre hipergrafos de Berge e Duchet [Ber89], apresentado a seguir, mostra uma caracterização de um hipergrafo ser ou não k-Helly.

Teorema 1.1 (Berge e Duchet [BD75, Ber89])**.** Um hipergrafo H é k-Helly se e somente se para todo conjunto A de vértices com $|A| = k + 1$, a interseção das hiperarestas E_j com $|E_j \cap A| \geq k$ é não vazio.

2 O número de Helly na convexidade geodética

Apresentaremos resultados para algumas classes de grafos e a seguir para classes mais complexas. A partir de algumas dessas classes detectamos limites inferiores para o parâmetro.

2.1 Árvores

Teorema 2.1 (Árvores)**.** Seja G um grafo do tipo árvore. Então $h(G) = 2$.

Demonstração. Todo conjunto convexo em um grafo do tipo árvore é uma subárvore, e subárvores de uma árvore atendem à propriedade de Helly [Gol80].

Logo, $h(G) = 2$.

■

2.2 Grafos completos

Teorema 2.2 (Completos)**.** Dado um grafo G com n vértices, denotado por K_n, então $h(G) = n$ se e somente se G é um grafo completo .

Demonstração. Seja $G = K_n$ um grafo completo com n vértices.

Tomando no grafo K_n a família de conjuntos convexos $S_1 = \{v_2, v_3, ..., v_n\}$, $S_2 = \{v_1, v_3, ..., v_n\}$, ... , $S_n = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$, estes formam uma família de convexos, $(n-1)$-intersectante, com núcleo vazio. Assim, G não é $(n-1)$-Helly.

Logo $h(G) = n$.

Supondo $h(G) = n$ e, supondo por contradição, que G é um grafo não completo, ou seja, existem ao menos dois vértices não adjacentes em G. Tomemos os conjuntos $A_1 = \{v_2, v_3, ..., v_n\}$, $A_2 = \{v_1, v_3, ..., v_n\}$, ... , $A_n = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$. Tais conjuntos são $(n-1)$-intersectantes. Tomando o fecho convexo de cada um desses conjuntos, temos os conjuntos convexos $S_1 = H(A_1)$, $S_2 = H(A_2)$, ... , $S_n = H(A_n)$. Assim, cada conjunto convexo S_k terá, ao menos $n-1$ elementos. Como o grafo G não é completo, existe um vértice v_i, para algum i, $1 \leq i \leq n$, tal que dois de seus vizinhos não são adjacentes, vizinhos estes que pertencem a A_i. Desse modo, $v_i \in H(A_i)$, e como $v_i \in A_j$, para todo $j \neq i$, então $v_i \in H(A_j)$, para todo j, $1 \leq j \leq n$. Logo $v_i \in S_j$, para todo j, $1 \leq j \leq n$. Pelo Teorema 1.1, temos que, dado o conjunto $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, ou seja, $|A| = n$, a interseção dos conjuntos convexos S_j, com $|S_j \cap A| \geq n-1$ é não vazio, pois $v_i \in S_j$, para todo j, $1 \leq j \leq n$. Logo, G é $(n-1)$-Helly, ou seja, $h(G) \leq n-1$, uma contradição.

Logo G é um grafo completo.

■

2.3 Ciclos

Teorema 2.3 (Ciclos)**.** Seja G um grafo do tipo ciclo com n vértices denotado por C_n. Se $n \neq 4$, então $h(G) = 3$. Caso contrário, $h(G) = 2$.

Demonstração. Se $n = 3$, temos que ciclos C_3 são grafos completos de tamanho três, logo o número de Helly é igual a três, consequência direta do resultado para grafos completos (Teorema 2.2).

Os conjuntos convexos num C_4 com dois ou mais vértices são as arestas e o grafo todo. Assim, toda família 2-intersectante é formada por duas arestas adjacentes ao mesmo vértice v e o próprio grafo G, ou seja, o vértice v pertence ao núcleo. Logo, $h(C_4) = 2$.

Para o caso $n > 4$, suponhamos, por contradição, que C_n não é 3-Helly. Então, pelo teorema de Berge e Duchet (Teorema 1.1), existem vértices $v_1, \ldots, v_4 \in V(C_n)$ e conjuntos convexos $S_1, \ldots, S_4 \in V(C_n)$ tal que $v_j \in S_i$, para $1 \leq i, j \leq 4$, se e somente se $i \neq j$. Sem perda de generalidade, assumimos que existe um caminho de v_1 até v_3, contendo v_2 e não contendo v_4. Assumimos também que o fecho convexo de v_1 e v_3 contém v_2. Assim S_2 contém v_1 e v_3, mas não contém v_2, uma contradição. Logo, o grafo G é 3-Helly, ou seja, $h(G) \leq 3$. Como é sempre possível tomarmos três conjuntos convexos contidos no ciclo, caminhos de tamanho $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, de modo a serem 2-intersectantes com o núcleo vazio, temos que $h(G) \geq 3$.

Logo, $h(G) = 3$.

■

3 Limites inferiores para o número de Helly

Nesta seção, apresentamos dois limitantes inferiores para o número de Helly na convexidade geodética que poderão ser verificados em qualquer grafo que possua determinada característica. Definimos como *geodético* um ciclo induzido C_l, $l \neq 4$, em G, em que os vértices de todo caminho P_k no ciclo, para $k = \lceil \frac{l}{2} \rceil$, formam um conjunto convexo. Com efeito, um limitante inferior é a existência em G de ciclos geodéticos, assim $h(G) \geq 3$. Outro limitante inferior é o tamanho da clique máxima, consequência direta da caracterização de grafos completos. Assim, se a clique máxima de um grafo G tem tamanho k, então $h(G) \geq k$.

4 Outras classes de grafos

Nesta seção, apresentaremos algumas classes não tão simples, ou não tão comuns quanto as anteriores.

4.1 Grafos k-partidos completos

Teorema 4.1 (k-partido)**.** Dado um grafo G k-partido completo. Então $h(G) = k$.

Demonstração. Seja G um grafo k-partido completo.

Temos no grafo G k conjuntos independentes, a saber $\mathcal{M}_1$, ... , $\mathcal{M}_k$. Como cada vértice de $\mathcal{M}_i$ é adjacente a todos os vértices dos conjuntos $\mathcal{M}_j$, para $i \neq j$, seus convexos não vazios são as cliques, variando o tamanho de um até k, sendo as de tamanho k as máximas de G, e o próprio G. Assim, não temos em G convexos com mais vértices que os formados pelas cliques máximas a não ser o próprio grafo. Como a clique máxima é um limitante inferior, $h(G) = k$.

■

4.2 Grades

Teorema 4.2 (d-Grade)**.** Dado um grafo $G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ onde G é do tipo *d-grade* completa, finita, (grade de dimensão d, $2 \leq d < \infty$). Então $h(G) = 2$.

Demonstração. Seja G um grafo do tipo *d-grade* completa.

Representaremos cada vértice v de G como pontos de coordenadas inteiras positivas no espaço d-dimensional, com $2 \leq d < \infty$, e cada dois vértices u e w são adjacentes se e somente se a distância euclidiana entre u e w é igual a um [IPS82]. Assim, o conjunto dos vértices $V(G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d))$ $= \{v = (v_1, v_2, \ldots, v_d)/1 \leq v_1 \leq \alpha_1, 1 \leq v_2 \leq \alpha_2, \ldots, 1 \leq v_d \leq \alpha_d\}$. Como todo convexo de uma d-grade completa é uma d-subgrade completa então cada S_i, $1 \leq i \leq 3$, é uma d-subgrade completa de G. Assim, dados vértices a, b e c em G, cada conjunto convexo S_i, é da forma:

$S_1 = \{(u_1, u_2, \ldots, u_d)/min\{b_1, c_1\} \leq u_1 \leq max\{b_1, c_1\}$ e $min\{b_2, c_2\} \leq u_2 \leq max\{b_2, c_2\}, \ldots, min\{b_d, c_d\} \leq u_d \leq max\{b_d, c_d\}\}$,

$S_2 = \{(v_1, v_2, \ldots, v_d)/min\{a_1, c_1\} \leq v_1 \leq max\{a_1, c_1\}$ e $min\{a_2, c_2\} \leq v_2 \leq max\{a_2, c_2\}, \ldots, min\{a_d, c_d\} \leq v_d \leq max\{a_d, c_d\}\}$,

$S_3 = \{(w_1, w_2, \ldots, w_d)/min\{a_1, b_1\} \leq w_1 \leq max\{a_1, b_1\}$ e $min\{a_2, b_2\} \leq w_2 \leq max\{a_2, b_2\}, \ldots, min\{a_d, b_d\} \leq w_d \leq max\{a_d, b_d\}\}$.

Tomando um vértice $e = (e_1, e_2, \ldots, e_d)$, de modo que cada uma de suas coordenadas $e_k = mediana\{a_k, b_k, c_k\}$, $1 \leq k \leq d$, verifica-se facilmente que $e \in S_1$, $e \in S_2$ e $e \in S_3$, ou seja, o vértice $e \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$, assim $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \emptyset$.

Logo, $h(G) = 2$.

∎

5 Conclusões

Apresentamos neste trabalho resultados para o número de Helly na convexidade geodética para algumas classes de grafos, como árvores, grafos completos, ciclos, grafos k-partidos e d-grades. Apresentamos também dois limitantes inferiores para o parâmetro.

Referências

[BD75] C. Berge and P. Duchet, *A generalization of Gilmore's theorem*, Recent advances in graph theory (Proc. Second Czechoslovak Sympos., Prague, 1974), Academia, Prague, 1975, pp. 49–55. MR 0406801

[Ber73] Claude Berge, *Graphs and hypergraphs*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973, Translated from the French by Edward Minieka, North-Holland Mathematical Library, Vol. 6. MR 0357172

[Ber89] ______, *Hypergraphs*, North-Holland Mathematical Library, vol. 45, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989, Combinatorics of finite sets, Translated from the French. MR 1013569

[DGK+09] Mitre C. Dourado, John G. Gimbel, Jan Kratochvíl, Fábio Protti, and Jayme L. Szwarcfiter, *On the computation of the hull number of a graph*, Discrete Math. **309** (2009), no. 18, 5668–5674. MR 2567969

[DPS09] Mitre C. Dourado, Fábio Protti, and Jayme L. Szwarcfiter, *Complexity aspects of the helly property: Graphs and hypergraphs*, The Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Surveys **17** (2009).

[DRdSS13] Mitre Costa Dourado, Dieter Rautenbach, Vinícius Gusmão Pereira de Sá, and Jayme Luiz Szwarcfiter, *Polynomial time algorithm for the radon number of grids in the geodetic convexity*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **44** (2013), 371 – 376.

[Duc88] Pierre Duchet, *Convex sets in graphs. II. Minimal path convexity*, J. Combin. Theory Ser. B **44** (1988), no. 3, 307–316. MR 941439

[Duc08] ______, *Radon and Helly numbers of segment spaces*, Convexity in discrete structures, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., vol. 5, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2008, pp. 57–71. MR 2454286

[Gol80] Martin Charles Golumbic, *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London-Toronto, Ont., 1980, With a foreword by Claude Berge, Computer Science and Applied Mathematics. MR 562306

[Hel23] Ed. Helly, *Über mengen konvexer körper mit gemeinschaftlichen punkte*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **32** (1923), 175–176.

[IPS82] Alon Itai, Christos H. Papadimitriou, and Jayme Luiz Szwarcfiter, *Hamilton paths in grid graphs*, SIAM J. Comput. **11** (1982), no. 4, 676–686. MR 677661

[vdV93] M. L. J. van de Vel, *Theory of convex structures*, North-Holland Mathematical Library, vol. 50, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993. MR 1234493

Moisés Teles Carvalho Junior
COPPE - UFRJ, Centro de Tecnologia, bloco H, sala 319
Rio de Janeiro - RJ - Brasil - Caixa postal: 68511 - CEP: 21941-972
moisesteles@cos.ufrj.br

Mitre Costa Dourado
CCMN - UFRJ - Cidade Universitária
Av. Athos da Silveira Ramos, 274
Ilha do Fundão - Rio de Janeiro - Brasil - CEP: 21941-916
mitre@dcc.ufrj.br

Jayme Luiz Szwarcfiter
COPPE - UFRJ, Centro de Tecnologia, bloco H, sala 319
Rio de Janeiro - RJ - Brasil - Caixa postal: 68511 - CEP: 21941-972
jayme@cos.ufrj.br